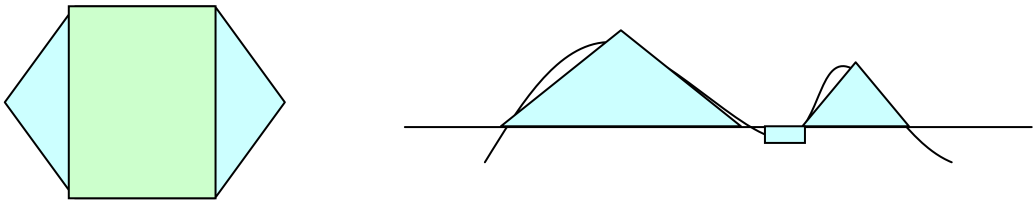
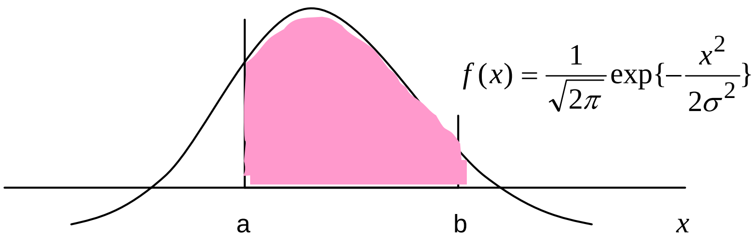
Chapter 6 적분

고대 수학자들은 사각형의 면적(밑변×높이), 삼각형 면적(밑변×높이/2) 평행 사변형의 면적(Euclid geometry (밑면×높이), 사다리꼴의 면적 ((윗변+아래변)*높이/2)를 이용하여 구하였다. 이를 이용하여 왼쪽의 다각형 면적은 구할 수 있으나 오른쪽의 곡선의 면적은 어떻게 구할 것인가?



Archimedes는 곡선의 면적을 이미 알려진 다각형, 삼각형의 면적으로 근사 시켜 구하는 방법을 생각하였다. 이것이 면적에 대한 현재 정의의 근간이 된다.

통계학에 있어서 적분이 이용되는 곳은 확률 계산이다. 다음은 표준 정규 분포(standard normal distribution, Gaussian distribution)를 따르는 확률 변수 X 에서 (전체 면적은 1이다. 확률의 정의를 생각해 보라.) 우리가 원하는 구간 (a, b)의 확률을 계산하기 할 때 적분이 이용된다.



6.1 부정 적분

만약 함수 $f(x)$ 의 모든 정의역에서 $F'(x)=f(x)$ 이라면 함수 $F(x)$ 는 $f(x)$ 의 역-미분(anti-derivative)이라 한다. **이처럼 적분은 미분의 역이다. 적분의 결과를 미분하면 적분의 함수가 된다.**

정의 만약 함수 $f(x)$ 가 미분 가능하다면, 함수 $f(x)$ 의 모든 역-미분 함수를 함수 $f(x)$ 의 x 에 대한 부정 적분(indefinite integral with respect to x)이라 하고 $\int f(x)dx$ 로 표시한다.

$\int$(integral)은 **적분 기호**이며, dx 의 의미는 함수 $f(x)$ 을 x **에 대해** 적분한다는 것이다.

부정 적분을 구하는 방법은 다음과 같다.

(1) $\int f(x)dx = F(x)+c$ (c는 임의의 상수) : 기본 개념

(2) $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$ (상수항 곱의 규칙)

(3) $\int [f(x)\pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$ (합과 차의 규칙)

■예제■ 함수 $f(x)=2x$ 의 부정 적분 $\int 2xdx$ 구하시오.

$\int 2xdx = x^2 + c$. x^2 (역-미분)을 미분하면 $2x$ 이다.

■예제■ 함수 $f(x)=x^5$ 의 부정 적분을 구하시오.

$$\int x^5 dx = \frac{1}{6}x^6 + c$$

■예제■ $\int (x^2 - 2x + 5)dx$ 을 구하시오.

$$\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 5x + c$$

위의 예제에서 적분 결과를 미분하면 적분하려는 함수와 같음을 알 수 있다. 그러므로 적분은 역-미분과 같은 개념이다.

상수 C 는 필요한가? 실제 구간의 면적을 구할 때는 필요 없다. 다음 예를 보자. 상수 C 는 사라진다.

$$\int_0^1 2xdx = x^2 + c\Big]_0^1 = (1+c)-(0+c) = 1$$

HOMEWORK #16-1 DUE 5월 31일(화)

다음 함수의 부정 적분을 구하시오.

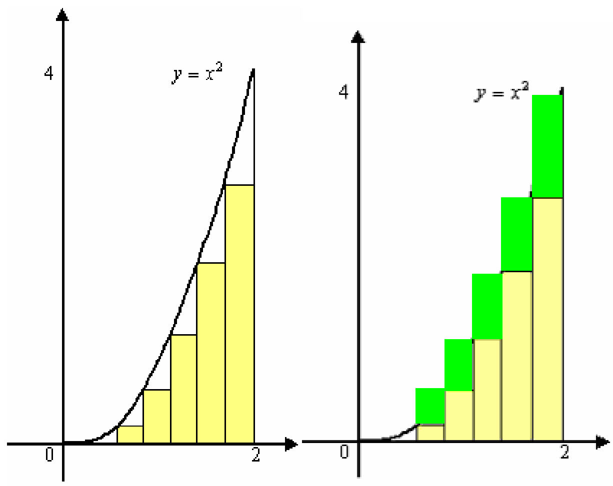
(1) $f(x) = 6x^{-3} + 2x + 3$ (2) $f(x) = 2\sqrt{x}$

(3) $f(x) = x^{-2/3}$ (4) $f(x) = \frac{2}{x^3}$

(5) $f(x) = 2 - \frac{5}{x^2}$ (6) $f(x) = 3\cos x$

6.2 정적분

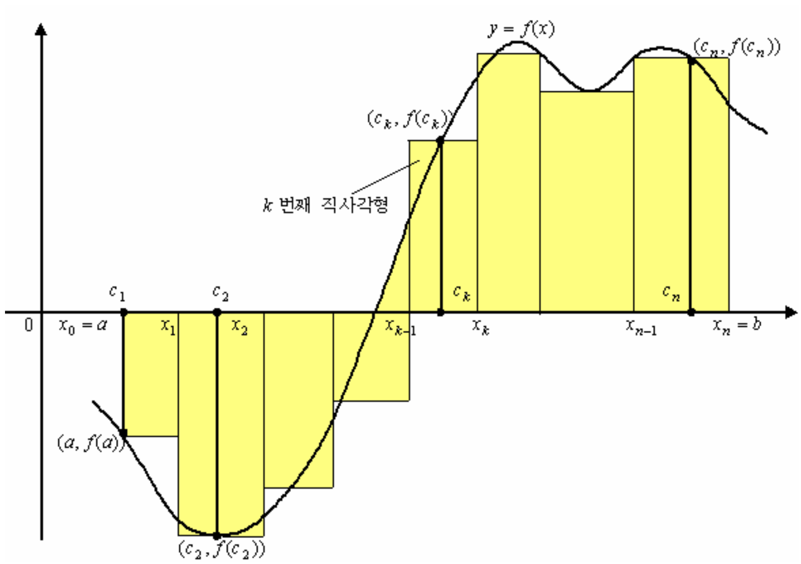
정적분은(면적) 부정 적분(역-미분 함수)과는 다른 접근 방법이다. 그러나 이 두 개념은 17세기 경에 Newton-Leibniz에 의해 서로 연결되었고 이를 적분(integral)이라 하였다. 우선 이 절에서는 정적분의 개념을 살펴보기로 하자. 구간 $[a,b]$의 함수 $f(x)$ 아래 면적은 어떻게 구할까? 구간 $[a,b]$을 아래와 같이 여러 구간으로 나눈 후 얻은 직사각형의 면적의 합을 함수의 면적으로 생각할 수 있다. 함수와 x축으로 이루어진 공간의 면적을 정적분이라 한다. 아래 그림에서 정적분(실제 면적: 함수 $f(x)$와 x축 사이 면적)은 왼쪽보다는 크고 오른쪽 보다는 적을 것이다.



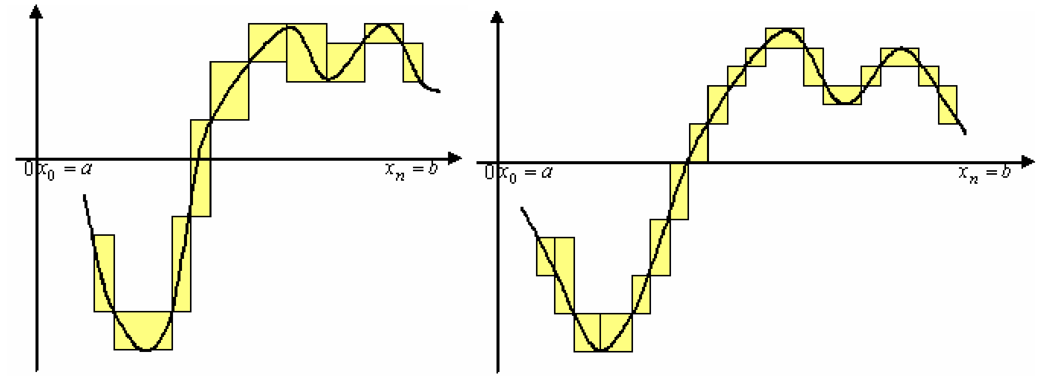
6.2.1 Riemann 적분

구간 $[a,b]$의 함수 $f(x)$ Riemann Integral(면적)은 다음과 같이 계산된다.

$$S_r = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$$



구간을 더 좁게 나눌수록 실제 면적과 Riemann적분의 차이는 줄어든다. 나눈 구간의 넓이가 0으로 가져가면 Riemann 면적과 실제 함수의 면적은 같아질 것이다.



면적을 구하기 위하여 함수의 구간을 나누고 구간의 넓이를 0으로 근사하여야 하는가? 그렇지는 않다. 단지 정적분 개념을 설명하기 위함이다. 다음 절에 나온 규칙들을 이용하여 정적분을 구하면 된다.

6.2.2 정적분 구하기

다음 규칙을 이용하여 정적분을 손쉽게 구할 수 있다.

(1) $\int_a^a f(x)dx = 0$ [통계: 연속 확률변수의 한 점에서 확률은 0이다]

(2) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ (구간의 순서가 바뀌면 부호 반대)

(3) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b kf(x)dx$ (k는 임의의 상수)

(4) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$ (합과 차)

(5)만약 구간 $[a,b]$에서 $f(x) \ge g(x)$이면 $\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx$ (domination)

(6)만약 구간 $[a,b]$에서 $f(x) \ge 0$이면 $\int_a^b f(x)dx \ge 0$ [통계] 확률변수의 확률 분포 함수는 항상 0(확률의 정의)이므로 구간의 확률 또한 0보다 크다.

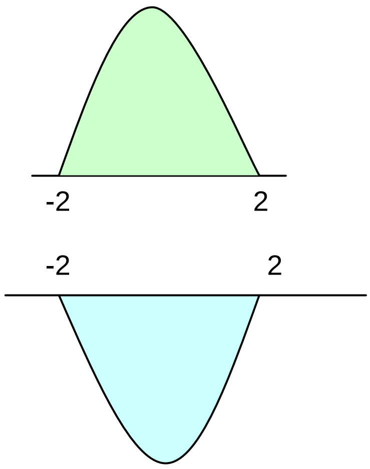
(7) $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$

(8) $\int_a^b cdx = c(b-a)$

6.2.3 정적분과 부정 적분과의 관계

Newton-Leibniz은 $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ 임을 보였다.

■예제■ $-2 \le x \le 2$ 구간에서 $1) y = 4 - x^2$ 과 $2) y = x^2 - 4$ 의 정적분을 구하시오.

함수 $y = 4 - x^2$ 는 $-2 \le x \le 2$ 에서 양의 값이므로 $\int_{-2}^{2}(4 - x^2)dx = [4x - \frac{x^3}{3}]_{-2}^{2} = \frac{32}{3}$ 함수 $y = x^2 - 4$ 는 $-2 \le x \le 2$ 에서 음의 값이므로 $-\int_{-2}^{2}(x^2 - 4)dx = \int_{-2}^{2}(4 - x^2)dx = \frac{32}{3}$	

통계학에서 사용되는 확률밀도함수는 y-축 아래에서는 정의되지 않는다.why? 확률은 음의 값을 가질 수 없기 때문이다. 확률밀도함수에서 x 는 확률변수가 가질 수 있는 값이면 y 는 그것에 대응하는 확률이다.

정적분을 구할 때 다음 절차를 따른다.

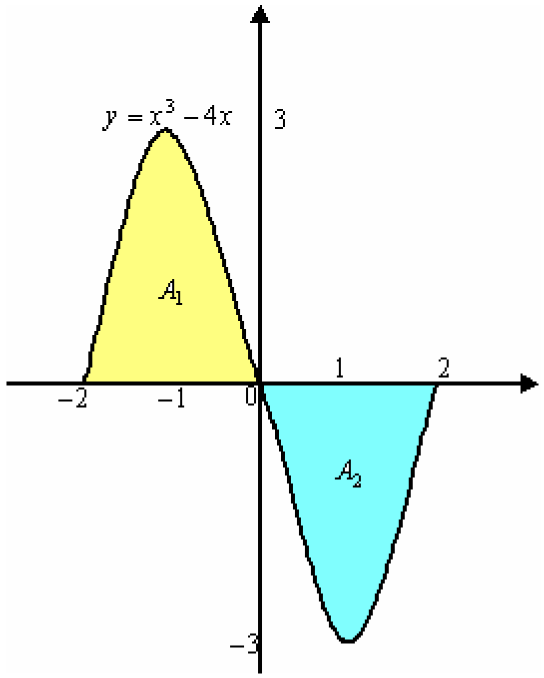
(1)구하려는 구간 $[a,b]$ 에서 $f(x) = 0$ 인 x 값을 구한다.

(2) $f(x) = 0$ 인 x 값에 의해 구간 $[a,b]$ 에 의해 서브(sub) 구간을 나눈다. 구간을 나누는 곳은 함수 값(y)의 부호가 바뀌는 곳이다. 위의 예제 함수에서는 함수 값이 바뀌는 구간이 없으나 아래 예제 함수의 경우 $x = 0$ 에서 부호가 바뀐다.

(3)서브 구간의 적분을 구한다.

(4)구한 적분 값에 절대값을 취한 후 합해 정적분을 구한다

■예제■ $-2 \le x \le 2$ 구간에서 $y = x^3 - 4x$ 과 정적분을 구하시오.



1) $y = x(x^2 - 4) = x(x-2)(x+2) = 0 \Rightarrow x = -2,0,2$

2) $x = 0$ 에서 함수 값이 바뀌므로 $[-2,0]$ 과 $[0,2]$ 두 개의 서브 구간으로 나눈다.

3) 적분을 구한다.
$$\int_{-2}^{0}(x^3 - 4x)dx = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2]_{-2}^{0} = 4$$
$$\int_{0}^{2}(x^3 - 4x)dx = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2]_{0}^{2} = -4$$

4) 면적은 $|4| + |-4| = 8$ 이다.

매번 함수 값이 0인 경우를 생각해야 되나? 통계학에서는 그럴 필요가 없다. 통계학에서는 확률 밀도 함수와 같이 함수 값(확률)이 0이상인 경우에만 관심을 갖기 때문이다.

HOMEWORK #16-2 DUE 5월 31일(화)

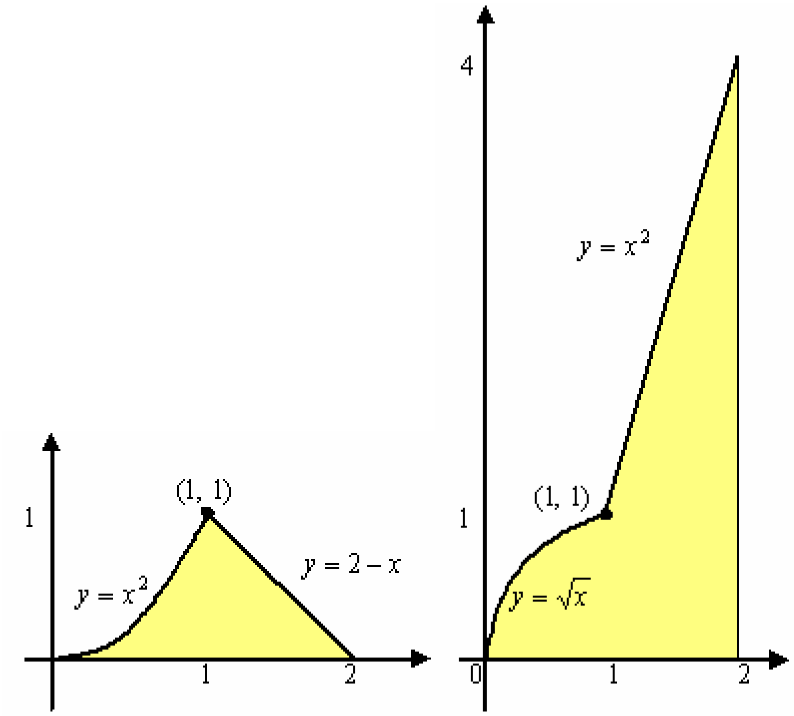
다음 함수의 정적분을 구하시오.

$(1)\int_0^1(1+x^2)dx$ $(2)\int_0^2(4-x^3)dx$ $(3)\int_0^1(x^2+\sqrt{x})dx$ $(4)\int_1^{32}x^{-5/6}dx$

$(5)\int_0^{\pi}(\sin x)dx$ $(6)\int_{-2}^{-1}\frac{2}{x^2}dx$ $(7)\int_{-1}^{1}(s+1)ds$ $(8)\int_{-4}^{4}|x|dx$

HOMEWORK #16-3 DUE 5월 31일(화)

빗금 친 부분의 면적을 구하시오.



6.3 치환 적분

치환 적분은 미분의 연쇄 법칙의 반대 개념이다. 이해를 돕기 위하여 예를 들어 설명하기로 하자. u 가 미분 가능한 x 의 함수일 경우 $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$ 이다.

■예제■ $\int (x+2)^5 dx$ 을 구하시오.

만약 $u = x + 2$ 라 놓으면 $du = d(x+2) = dx$ 이고 $\int (x+2)^5 dx$ 는 $\int u^5 du$ 이다.

그러므로 $\int u^5 du = \frac{u^6}{6} + c = \frac{(x+2)^6}{6} + c$

■예제■ $\int\sqrt{1+x^2}\cdot 2xdx$ 을 구하시오.

만약 $u=1+x^2$ 라 놓으면 $du=d(1+x^2)=2xdx$ 이고 $\int\sqrt{1+x^2}\cdot 2xdx$ 는 $\int u^{1/2}du$ 이다.

그러므로 $\int u^{1/2}du=\frac{2u^{3/2}}{3}+c=\frac{2(1+x^2)^{3/2}}{3}+c$

위의 방법을 치환 (substitution) 적분 방법을 정리하면 다음과 같다.

$$\int f(g(x))\cdot g'(x)dx = \int f(u)du \quad (u=g(x), du=g'(x)dx \text{ 로 치환})$$
$$= F(u)+c = F(g(x))+c$$

▣삼각함수 적분

(1) $\int \cos u du = \sin u + c$

(2) $\int \sin u du = -\cos u + c$

(3) $\int \sec^2 u du = \tan u + c$

(4) $\int \csc^2 u du = -\cot u + c$

(5) $\int \sec u \tan u du = \sec u + c$

(6) $\int \csc u \cot u du = -\csc u + c$

■예제■ $\int\cos(7x+5)dx$ 을 구하시오.

만약 $u=7x+5$ 라 놓으면 $du=d(7x+5)=7dx$ 이고 $\int\cos(7x+5)dx$ 는 $\int\cos u\frac{du}{7}$ 이다.

그러므로 $\int\cos u\frac{du}{7}=\frac{1}{7}\int\cos udu=\frac{1}{7}\sin u+c=\frac{1}{7}\sin(7x+5)+c$

■예제■ $\int(x^2+2x-3)^2(x+1)dx$ 을 구하시오.

$$\int(x^2+2x-3)^2(x+1)dx = \int u^2\frac{1}{2}du \quad (u=(x^2+2x-3), du=(2x+2)dx \text{ 으로 치환})$$
$$=\frac{1}{6}u^3+c = \frac{1}{6}(x^2+2x-3)^3+c$$

HOMEWORK #17-1 DUE 6월 1일(수)

다음 함수의 부정적분을 구하시오.

(1)$\int x\sin(2x^2)dx$ (2)$\int 28(7x-2)^3 dx$ (3)$\int \frac{1}{(1-x)^2}dx$

(4)$\int r^4(7-r^5)^3 dr$ (5)$\int 8x(x^2-1)^{1/3}dx$ (6)$\int \frac{dt}{\sqrt{5t}}dt$

HOMEWORK #17-2 DUE 6월 1일(수)

다음 함수의 정적분을 구하시오.

(1)$\int_0^1 x^3(1+x^4)^3 dx$ (2)$\int_0^1 y\sqrt{1-y^2}dy$ (3)$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{4x}{\sqrt{x^2+1}}dx$

(4)$\int_1^4 \frac{dy}{2\sqrt{y}(1+\sqrt{y})^2}$ (5)$\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^2}dx$ (6)$\int_0^1 \sqrt{s^5+2s}(5s^4+2)ds$

HOMEWORK #17-3 DUE 6월 1일(수)

다음에 답하시오.

1)함수 f 가 연속일 때 $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 f(1-x)dx$ 임을 보이시오.

(2)만약 $\int_0^1 f(x)dx = 3$ 일 때 다음의 경우 $\int_{-1}^0 f(x)dx$ 을 구하시오.

a) f 가 우함수 (even function) b) f 가 기함수 (odd function)

(3) $\int_{-a}^a h(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{h는기함수} \\ 2\int_0^a h(x)dx & \text{h는우함수} \end{cases}$ 임을 보이시오.

(4) $h(x) = \sin x$ (우함수), $h(x) = \cos x$ (기함수), $a = \pi/2$ 라 하여 위의 결과를 보이시오.

6.4 적분 기법

(1) $\int du = u + c$ 정의

(2) $\int kdu = ku + c$, k 는 상수, (상수항 곱)

(3) $\int (du \pm dv) = \int du \pm \int dv = u \pm v$ (합과 차)

(4) $\int u^n du = \frac{1}{n+1} u^{n+1} + c$ 단 $n = -1$ 이면 $\int \frac{1}{u} du = \ln|u| + c$ (승)

(5)삼각 함수

(1) $\int \cos u du = \sin u + c$

(2) $\int \sin u du = -\cos u + c$

(3) $\int \tan u du = \ln|\sec u| + c$

(6)지수 함수

(1) $\int e^x dx = e^x + c$

(2) $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + c$

(참고) $f(x) = e^x \Rightarrow f' = e^x$, $f(x) = a^x \Rightarrow f' = a^x \ln a$

(7)특별한 함수

(1) $\int \frac{1}{x} dx = \ln x (x > 0), \ln(-x)(x < 0)$

(2) $\int \frac{1}{1+u^2} du = \tan^{-1} u + c$

(3) $\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du = \sin^{-1} u + c$

■예제■ $\int (3e^x + 3^x) dx$ 을 구하시오.

$$\int 3e^x dx + \int 3^x dx = 3e^x + \frac{1}{\ln 3} 3^x + c$$

■예제■ $\int e^{(x^2)} x dx$ 을 구하시오.

$$u = x^2 \Rightarrow du = xdx \text{ 그러므로 } \int e^{(x^2)} xdx = \frac{1}{2}\int e^u du = \frac{1}{2}e^u + c = \frac{1}{2}e^{x^2} + c$$

■예제■ $\int \frac{1}{x^2+2x+2} dx$ 을 구하시오.

$x^2+2x+2 = (x+1)^2+1$ 이므로 가장 유사한 방법은 $\int \frac{1}{1+u^2} du = \tan^{-1} u + c$ 이다.

위와 같은 방법으로 $\int \frac{1}{x^2+2x+2} dx = \int \frac{1}{1+u^2} du = \tan^{-1} u + c = \tan^{-1}(x+1) + c$

HOMEWORK #17-4 DUE 6월 1일(수)

다음을 구하시오.

(1) $\int_1^2 \frac{2^{\ln x}}{x} dx$ (2) $\int_{-1}^0 3^{x+1} dx$ (3) $\int_0^1 \frac{16x}{8x^2+2} dx$

6.5 부분 적분 (integral by parts)

이 공식은 $d(uv) = udv + vdu$ 에서 양변을 적분하면 얻게 된다.

$$\int d(uv) = \int udv + \int vdu \Rightarrow \int udv = uv - \int vdu$$

■예제■ $\int x \cos x dx$ 을 구하시오.

$u = x$, $dv = \cos xdx$ 라 하자. ➔ 그러면 $du = dx$, $\int dv = \int \cos xdx \Rightarrow v = \sin x$

$\int x\cos xdx = x\sin x - \int \sin xdx = x\sin x + \cos x + c$ (이용 $\int udv = uv - \int vdu$)

■예제■ $\int \ln x dx$ 을 구하시오.

$u = \ln x$, $dv = dx$ 라 하자. 그러면 $du = \frac{1}{x}dx$ **(*)**, $\int dv = \int dx \Rightarrow v = x$

$\int \ln x dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + c$ (이용 $\int udv = uv - \int vdu$)

■예제■ $\int x^2 e^x dx$ 을 구하시오. [연속 사용]

$u = x^2$, $dv = e^x dx$ 라 하자.

그러면 $du = 2xdx$, $\int dv = \int e^x dx \Rightarrow v = e^x$

$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2xe^x dx$ (이용 $\int udv = uv - \int vdu$)

한번 더 $u = x$, $dv = e^x dx$ 라 하자.

그러면 $du = dx$, $\int dv = \int e^x dx \Rightarrow v = e^x$

$\int 2xe^x dx = 2\int xe^x dx = 2[xe^x - \int e^x dx] = 2(xe^x - e^x)$ (이용 $\int udv = uv - \int vdu$)

그러므로 $\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2xe^x dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + c$

위와 같이 $\int f(x)g(x)dx$ 의 형태이면서 $f(x)$ 는 계속 미분하면 0이 되고 $g(x)$ 는 적분 하는데 어려움이 없다면 **Tabular integration**(표 적분)을 이용하면 편리하다.

,

$f(x) = x^2$ $f(x)$ 와 그 미분		$g(x) = e^x$ $g(x)$ 와 그 적분
x^2	+ ↘	e^x
$2x$	-- ↘	e^x
2	+ ↘	e^x
0		e^x

$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + c$

■예제■ $\int x^3 \sin x dx$ 을 구하시오 (표 적분 여러 번 사용 가능)

$f(x)=x^3$ $f(x)$와 그 미분		$g(x)=\sin x$ $g(x)$와 그 적분
x^3	+	$\sin x$
$3x^2$	--	$-\cos x$
$6x$	+	$-\sin x$
6	--	$\cos x$
0		$\sin x$

$$\int x^3 \sin x dx = -x^3 \cos x + 3x^2 \sin x + 6x \cos x - 6 \sin x + c$$

HOMEWORK #18-1 DUE 6월 7일(화)

다음 함수를 적분하시오.

(1)$\int_0^1 x \sin x dx =$ (2)$\int_1^2 x^2 \ln x dx =$ (3)$\int_0^1 x^3 e^x dx =$ (4)$\int_0^1 x^2 e^{2x} dx =$

6.6 적분 응용

6.6.1 확률 변수와 확률 분포 함수

▣표본 공간(sample space)

실험이나 측정 조사에서 발생 가능한 모든 결과(각 결과는 원소:element)들의 모임을 표본 공간이라 정의한다.

■예제■ 제품 수명을 측정하는 실험에서 표본 공간은? $S = \{x : 0 \le x\}$, $x =$ 전구 수명

▣확률 변수(random variable)

표본 공간의 각 결과(원소)에 실수(real number) 값을 대응시키는 규칙(함수)을 (확률) 변수라 한다. 즉 표본 공간이 S인 확률 실험에서 각 표본 공간 원소에 오직 하나의 실수 값을 대응하는 함수 X를 확률 변수라 혹은 변수 한다. 기호로는 $X(s)=x$ 이다.

■예제■ 제품의 수명을 측정하는 실험에서 표본 공간은 실수이므로 확률 변수 X를 제품의 수명이라 하면 측정된 수명이 X의 값이 된다. 제품의 수명을 조사하였더니 (1000, 580, 940, …)이었다면 $(x_1=1000, x_2=580, x_3=940, ...)$ 이 된다.

▣이산형 확률 변수와 연속형 확률 변수

표본 공간이 셀 수 있는 경우(finite) 정의된 확률 변수를 이산형, 셀 수 없는 경우(infinite) 정의된 확률 변수를 연속형 확률 변수라 한다. 불량 개수, 교통 사고 발생 수, 주사위 눈금은 이산형 확률 변수이고 제품 수명, 강수량, 정격 전압 등은 연속형 확률 변수이다. 이상형과 연속형에 대한 다른 정의로는 임의의 구간을 설정하여도 구간 내의 값이 측정 될 수 있으면 연속형, 그렇지 않으면 이산형이라 한다.

▣확률 분포(확률 밀도 함수)

확률 변수가 가질 수 있는 값들을 정의역, 각 값들의 확률을 치역으로 한 함수를 (확률) 분포 함수(density function) 혹은 확률 밀도 함수, probanility density function)라 하고 $f(x)$(이산형 변수일 경우는 $p(x)$ 사용하기도 한다)로 나타낸다. 확률 분포 함수 조건은 다음과 같다.

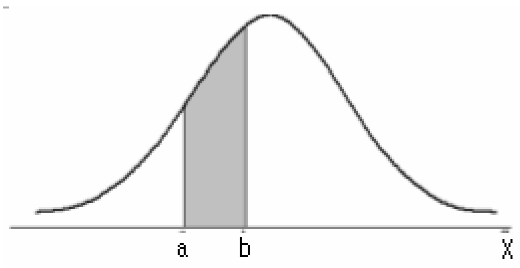
(1)확률 변수 X의 임의의 값 x 의 확률 값은 0 이상이다. $f(x)\ge 0$ 혹은 $p(x)\ge 0$

(2) 확률 변수 X의 모든 값 x 의 확률을 더하면 1이다. $\int_S f(x)=1$ 혹은 $\sum_S p(x)\ge 0$

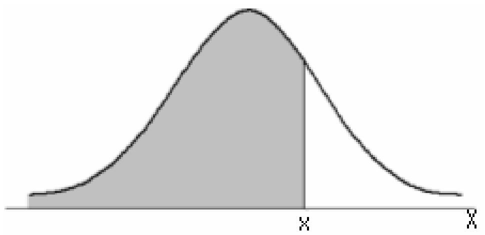
▣분포 함수와 확률 계산

(확률) 변수 X의 확률 밀도 함수를 $f(x)$ 라 하자. 이에 대해 구간 $[a,b]$ 의 확률 $P(a\le X\le b)$ 과 분포 함수 $F(x)$ 는 다음과 같이 정의한다.

(1) $P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)dx$



(2) $F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$



위로부터 $P(a < X \le b) = F(b) - F(a)$ 임을 알 수 있다.

6.6.2 기대값

확률 분포에서 매우 중요한 개념의 하나인 (수학적) 기대값(expected value)에 대해 예제를 통해 먼저 알아보자.

■예제■ 주사위 한 번 던지는 게임에서 A={1,2,3}이 나오면 100원, B={4,5}가 나오면 500(원), C={6}가 나오면 3,500원을 받는다고 하자. 한 게임 참가비가 1,000원일 때 게임에 참여하겠는가?

의사 결정에 중요한 것은 평균적으로(on average) 얼마 받을 수 있는가 하는 것이다. 다음 계산에 의하면 게임을 하는 사람은 평균적으로 800원을 얻을 수 있으므로 손해 보는 게임이다.

$$100 * \frac{3}{6} + 500 * \frac{2}{6} + 3500 * \frac{1}{6} = 800$$

이산형 확률 변수 X의 기대값은 $E(X) = \sum_{x \subset S} xp(x)$ 이고 연속형 확률 변수 X의 기대값은 $E(X) = \int_S xf(x)dx$ 으로 정의한다.

■예제■ 주사위 던지는 게임에서 주사위 눈금을 X라 할 때 기대값을 구하시오. 다른 말로 표현하면 주사위의 기대 눈금은?

$$E(X) = \sum_{x \subset A} xP(x) = 1*\frac{1}{6} + 2*\frac{1}{6} + 3*\frac{1}{6} + 4*\frac{1}{6} + 5*\frac{1}{6} + 6*\frac{1}{6} = 3.5$$

X의 함수 $u(x)$ 의 기대값은 $E(u(X)) = \sum_{x \subset A} u(x)P(x)$ (연속형 $E(u(x)) = \int u(x) f(x) dx$)으로 정의된다.

만약 $u(X) = (X - E(X))^2$ 인 경우 기대값을 분산(variance)이라 하며 분산은 확률 변수 분포의 흩어진 정도를 나타내는 수치(관측치가 얼마나 변동이 큰가?)이다. 분포가 넓게 퍼져 있을수록 분산이 커진다.

이산형 확률 변수의 분산: $V(X) = E(X - E(X))^2 = \sum (x - E(X))^2 p(x)$

연속형 확률 변수의 분산: $V(X) = E(X - E(X))^2 = \int (x - E(X))^2 f(x) dx$

분산을 구하는 간편 식: $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ (2.3.4.절 참고)

■예제■

확률 변수 X 의 확률 밀도 함수가 $f(x) = \begin{cases} c(2-x), & 0 \le x \le 2 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$ 이다.

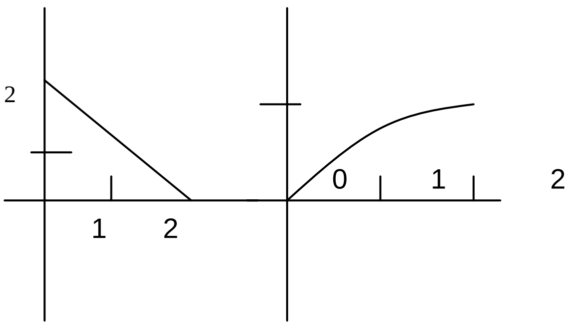
(1)상수 c 구하시오.

확률 밀도 함수의 조건을 만족 하려면 ① $f(x) = c(2-x) > 0,\ 0 \le x \le 2$ 그러므로 $c > 0$ 이어야 한다. ② $\int_0^2 c(2-x)dx = 1$ ➔ $c(2x - \frac{x^2}{2})]_0^2 = c[2-0] = 1$ 그러므로 $c = \frac{1}{2}$ ➔ $f(x) = 1 - x/2,\ 0 \le x \le 2$

(2)분포 함수 $F(x)$ 구하시오.

$$F(x) = \int_0^x 1 - \frac{t}{2} dt = t - \frac{t^2}{4}]_0^x = x - \frac{x^2}{4}, \quad 0 \le x \le 2$$

(3) $f(x)$ 와 $F(x)$ 그리시오.



(4) $P(1 < Y \le 2)$ 구하시오.

$$P(1 \le Y \le 2) = \int_1^2 1 - \frac{t}{2} dt = t - \frac{t^2}{4}]_1^2 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}, \qquad P(1 \le Y \le 2) = F(2) - F(1) = (2 - \frac{2^2}{4}) - (1 - \frac{1^2}{4}) = \frac{1}{4}$$

(5) $E(X)$ 와 $V(X)$ 구하시오.

$$E(X) = \int xf(x)dx = \int_0^2 x(1-\frac{x}{2})dx = [\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}]_0^2 = \frac{2}{3}$$

$$E(X^2) = \int x^2 f(x)dx = \int_0^2 x^2(1-\frac{x}{2})dx = [\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{8}]_0^2 = \frac{2}{3}$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{2}{3} - (\frac{2}{3})^2 = \frac{2}{9}$$

HOMEWORK #18-2 DUE 6월 7일(화)

확률 변수 X 의 확률 밀도 함수가 $f(x) = \begin{cases} cx^2 + x, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$ 이다.

(1)상수 c 구하시오.

(2)분포함수 $F(x)$ 구하시오.

(3) $P(0 < X \le 1/2)$ 구하시오.

(4) $P(X > 1/2 \mid X > 0.1)$ 구하시오.

(5) $E(X)$ 와 $V(X)$ 구하시오.

HOMEWORK #18-3 DUE 6월 7일(화)

연속형 확률 변수 X 에 대해 $E(X) = \mu$, $V(X) = \sigma^2$ 이다. 기대치의 정의를 이용하여 $Y = aX + b$ (a,b 는 상수)의 기대치와 분산이 각각 $E(Y) = a\mu + b$, $V(X) = a^2\sigma^2$ 임을 보이시오.

6.6.3 지수 분포

확률 변수 X (전구 수명, 기다리는 시간)가 모수가 θ (모집단의 특성치이며 이 값을 알면 $f(x)$ 그래프를 그릴 수 있음)인 지수 분포를 따른다고 하면 ($X \sim Exp(\theta)$) 확률분포 함수는 다음과 같다.

$$f(x) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, \quad 0 < x, \quad 0 < \theta$$

■예제■ $f(x)=\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}$ 가 확률 밀도 함수임을 보이시오.

(1) $0<x$ 이면 $f(x)=\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}=\frac{1}{\theta}\frac{1}{e^{\frac{x}{\theta}}}>0$. (2) $\int_0^\infty f(x)dx=\int_0^\infty \frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}dx=-e^{-\frac{x}{\theta}}]_0^\infty=0-(-1)=1$.

■예제■ $X\sim Exp(\theta)$ 인 경우 $E(X)=\theta$ 임을 보이시오.

$$E(X)=\int_0^\infty xf(x)dx=\int_0^\infty x\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}dx$$

[방법1]부분 적분 이용: $\int udv=uv-\int vdu$

$u=x$, $dv=\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}dx$ 라 하면 $du=dx$, $\int dv=\int\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}dx\Rightarrow v=-e^{-\frac{x}{\theta}}$

$$E(X)=\int_0^\infty x\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}dx=x(-e^{-\frac{x}{\theta}})]_0^\infty-\int_0^\infty -e^{-\frac{x}{\theta}}dx=\int_0^\infty e^{-\frac{x}{\theta}}dx=\theta e^{-\frac{x}{\theta}}]_0^\infty=\theta$$

[방법2]표 적분 이용하기

$f(x)=x$ $f(x)$ 와 그 미분		$g(x)=\frac{1}{\theta}e^{-x/\theta}$ $g(x)$ 와 그 적분
x	+	$\frac{1}{\theta}e^{-x/\theta}$
1	--	$-e^{-x/\theta}$
0		$\theta e^{-x/\theta}$

$$\int x\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}dx=-xe^{-x/\theta}-\theta e^{-x/\theta}$$

$$E(X)=\int_0^\infty x\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}dx=[-xe^{-x/\theta}-\theta e^{-x/\theta}]_0^\infty=\theta$$

HOMEWORK #18-4 DUE 6월 7일(화)

$X\sim Exp(\theta)$ 일 경우 $V(X)$ 을 구하시오. $V(X)=E(X^2)-E(X)^2$ 을 이용하자. $E(X)=\theta$ 임을 알고 있으므로 $E(X^2)$ 을 구하면 된다. 표 적분을 이용하여 $E(X^2)=\int_0^\infty x^2f(x)dx=2\theta^2$ 임을 보이시오.

HOMEWORK #18-5 DUE 6월 7일(화)

감마(Gamma) 함수 $\Gamma(n) = \int_0^\infty y^{n-1} e^{-x} dy = (n-1)\Gamma(n-1)$ 임을 보이시오.

$u = y^{n-1}$, $dv = e^{-y}dy$ 라 놓고 부분 적분하시오.

6.6.4 감마 분포 함수

감마 함수 $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty y^{\alpha-1} e^{-y} dy$ 에서 $x = \theta y$ 라고 치환 하면 $dx = \theta dy$, $x = 0 \Rightarrow y = 0$, $x = \infty \Rightarrow y = \infty$ 이므로 $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty (\frac{x}{\theta})^{\alpha-1} e^{-x/\theta} (\frac{1}{\theta}) dx$ 이다.

양변에 $\alpha = 1$ 을 대입하면 $1 = \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x/\theta} dx$ 이다.

이로부터 $f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x/\theta}, 0 \le x \le \infty$ 을 확률 밀도 함수로 사용할 수 있을 것이다. 이런 형태의 확률 밀도 함수를 갖는 확률 변수 X 는 (α, θ) 인 감마분포함수를 따른다고 한다.

$X \sim Gamma(\alpha, \theta)$, $\alpha = 1$ 인 $Gamma(\alpha = 1, \theta)$ 는 모수가 θ 인 지수 분포($Exp(\theta)$)이다. 감마 분포는 서로 독립인 지수 분포의 합으로 나타낼 수 있다. $X_i \overset{iid}{\sim} Exp(\theta)$ 이면 $\sum_{i=1}^{\alpha} X_i \sim Gamma(\alpha, \theta)$ 이다. 예를 들어 평균 수명이 1000시간인 지수분포($Exp(\theta = 1000)$)를 따르는 전구 3개($\alpha = 3$)가 있다고 하자. 첫 전구를 사용하다 고장 나면 다음 전구를 사용한다고 하자. 전구 3개 모두 고장 날 때까지 걸리는 시간을 확률 변수 X 라 하면 $X \sim Gamma(\alpha = 3, \theta = 1000)$ 인 분포를 따른다.

▣Gamma 확률 분포 함수의 평균 구하기

모수 (α, β) 인 감마분포의 평균은 $E(X) = \int_0^\infty x \frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x/\theta} dx = \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^\alpha} x^\alpha e^{-x/\theta} dx$

$\frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^\alpha} \int_0^\infty x^\alpha e^{-x/\theta} dx$ 에서 부분 적분을 이용하자. 표 적분을 이용하려면 α 값이 정해져 있어야 하는데 그렇지 않으므로 사용할 수 없다.

$u = x^\alpha, dv = e^{-x/\theta}$ 라 하면 $du = \alpha x^{\alpha-1} dx, v = \int e^{-x/\theta} dx = -\beta e^{-x/\theta}$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^{\alpha}}\int_0^{\infty} x^{\alpha} e^{-x/\theta} dx$$
$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^{\alpha}}\{[x^{\alpha}(-e^{-x/\theta})|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \alpha x^{\alpha-1}(-\theta e^{-x/\theta})dx]\}$$
$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^{\alpha}}[0 + \int_0^{\infty} \alpha x^{\alpha-1}(\theta e^{-x/\theta})dx] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^{\alpha}}\int_0^{\infty} \alpha x^{\alpha-1}(\theta e^{-x/\theta})dx$$
$$= \alpha\theta\int_0^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^{\alpha}} x^{\alpha-1} e^{-x/\theta})dx = \alpha\beta$$

$X_i \overset{iid}{\sim} Exp(\theta)$ 이면 $\sum_{i=1}^{\alpha} X_i \sim Gamma(\alpha,\theta)$ 임을 이용하여 $X \sim Gamma(\alpha,\theta)$ 인 확률 변수에 대해 $E(X)$, $V(X)$ 구하시오.

[참고] $\int x^2 e^x dx$ **을 구하시오.**

$u = x^2$, $dv = e^x dx$ 라 하자. 그러면 $du = 2xdx$, $\int dv = \int e^x dx \Rightarrow v = e^x$

$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2xe^x dx$ (이용 $\int udv = uv - \int vdu$)

한번 더 $u = x$, $dv = e^x dx$ 라 하자. ➔ 그러면 $du = dx$, $\int dv = \int e^x dx \Rightarrow v = e^x$

$\int 2xe^x dx = 2\int xe^x dx = 2[xe^x - \int e^x dx] = 2(xe^x - e^x)$ (이용 $\int udv = uv - \int vdu$)

그러므로 $\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2xe^x dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + c$]

위와 같이 $\int f(x)g(x)dx$ 의 형태이면서 $f(x)$ 는 계속 미분하면 0이 되고 $g(x)$ 는 적분 하는데 어려움이 없다면 Tabular integration을 이용하면 편리하다.

$f(x) = x^2$, $g(x) = e^x$

$f(x)$ 와 그 미분		$g(x)$ 와 그 적분
x^2	+	e^x
$2x$	-	e^x
2	+	e^x
0		e^x

$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x$