포트폴리오

개념

현대 포트폴리오 이론 modern portfolio theory, MPT은 해리 마코위츠에 의해 체계화된 이론으로, 자산을 분산투자하여 포트폴리오를 만들게 되면 분산투자 전보다 위험을 감소시킬 수 있다는 이론

포트폴리오이론의 가정에 따르면 투자자들은 투자안의 의사결정과정에서 고려하는 수익과 위험은 각각 평균과 분산으로 표현할 수 있으며, 포트폴리오를 구성할 경우 자산 간의 상관계수가 1인 경우가 아니라면 분산이 감소함을 통해 이득을 얻을 수 있다고 본다.

가정

- 합리적인투자자 : 이 가정에는 투자자는 위험회피성향을 가지고 있으며, 기대효용 극대화를 목표로 한다.
- 동질적 예측 : 동일 수익률 분포에 대해 투자자는 동질적 기대를 한다.
- 평균 분산 기준 : 기대수익은 기대값의 평균으로 측정하며, 위험은 분산으로 측정된다.
- 단일기간 모형 : 기간 동안 수익은 한 번만 발생한다.

수익과 위험

n개의 주식으로 구성된 포트폴리오의 기대수익률 $E(R_p)$ 와 위험(분산)σ_p^2은 다음과 같다.

- 포트폴리오의 기대수익 : $E(PR_n) = \sum_{i=1}^{n} w_i E(R_i)$, where $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$
- 포트폴리오 분산(위험 risk) : $V(PR_n) = \sum_{i=1}^{n} w_i^2 V(R_i) + \sum_{i \neq j}^{n} w_i w_j \operatorname{cov}(R_i, R_j)$

지배원리

시장에 존재하는 무수히 많은 자산을 조합하면, 수많은 포트폴리오를 만들 수 있고 이러한 포트폴리오들 중에서 동일한 위험을 지녔으나 기대수익이 높거나, 동일한 기대수익을 가져다 주지만 위험이 낮은 포트폴리오는 그렇지 않은 포트폴리오를 지배한다. 이러한 지배원리를 통해 서로 지배할 수 없는 포트폴리오들의 조합을 효율적투자선이라고 한다.

포트폴리오 기대수익 및 분산 계산방법

자산의 종류

무위험 자산 : 미래 가치를 현재 알 수 있는 자산 (예) 은행 예금, 정부 채권

위험 자산 : 미래 가치를 현재 알 수 없는 자산 (예) 주식, 금, 석유

수익률 : 시점 (0, t)

$R(t) = \dfrac{V(t) - V(0)}{V(0)}$, $R(t) =$ t 시점 수익률, $V(t) =$ t 시점의 가치, $V(0) =$ 0 시점(현재)의 가

$V(t)$ 값을 현재 시점에서 알 수 있는지 여부에 따라 담보, 무담보

무차익 원칙 No-arbitrage principle

$V(0) = 0$ 이면서 확률 1로 $V(t) \geq 0$ 인 자산은 존재하지 않는다. 자금과 위험을 부담하지 않고 이익을 얻을 수 있는 거래는 존재하지 않는다. (일물일가의 법칙이라 한다)

위험과 수익 (단기 모형) 계산

(2개의 자산 선택 가능)

- 무위험 자산 (채권, $100, T 시점에서 $110) : $A(0) = 100,\ A(t) = 110$
- 위험 자산 주식 : $S(0) = \$80$ - $\begin{cases} S(t) = \$120, p = 0.2 \\ S(t) = \$60, p = 0.8 \end{cases}$

(포트폴리오 1) 10,000$ 가지고 주식 100주, 채권 20주를 산다고 하자.

주가가 오르면 -> $R(t) = 200 + 4000 = 4{,}200$, p=0.2

주가가 내리면 -> $R(t) = 200 - 2000 = -1{,}800$, p=0.8

그러므로 기대 수익 = 4,200*0.2+(-1,800)*0.8 = -$600

분산 : $(4{,}200+120)^2 * 0.2 + (-1{,}800+120)^2 * 0.8$ = $5,760,000

(포트폴리오 2) 10,000$ 가지고 모두 주식을 산다면 125주

기대 수익 : -$1,000, 분산 : $9,000,000

(포트폴리오 2) 10,000$ 가지고 모두 채권 산다면 100주

기대 수익 : $1,000, 분산 : $0

예제 portfolio.csv

(Barrick, BCE, BMO, MDS, P-C, RIM) 1일 수익률(=(오늘주가-어제주가)/(오늘주가))

다음 포트폴리오의 기대 수익율과 분산을 구하시오.

$E(PR_n)=\sum_{i=1}^{n} w_i E(R_i)$, $V(PR_n)=\sum_{i=1}^{n} w_i^2 V(R_i)+\sum_{i\neq j}^{n} w_i w_j \operatorname{cov}(R_i,R_j)$

Portfolio	Barrick	BCE	BMO	MDS	Petro-Can	RIM
I	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6
II	1/12	1/12	1/12	3/12	3/12	3/12
III	3/12	3/12	3/12	1/12	1/12	1/12
IV	1/12	3/12	1/12	3/12	1/12	3/12
V	3/12	1/12	3/12	1/12	3/12	1/12

```
> R=as.matrix(read.csv("portfolio.csv")) #read data into matrix
> dim(R) # matrix dimension
[1] 72  6
> one=as.matrix(rep(1,72)) #all element=1 column vactor
> dim(t(one)) #t-transpose
[1]  1 72
> (1/72)*t(one)%*%R #mean vector
       Barrick          BCE        BMO         MDS  Petro.Can        RIM
[1,] 0.0084475 -0.003171389 0.01027403 0.003191667 0.01553403 0.03112944
```

```
> cov(R)
                Barrick           BCE           BMO          MDS
Barrick    5.856831e-03 -1.584102e-04  2.417847e-04 0.0013731053
BCE       -1.584102e-04  2.536531e-03  6.519278e-05 0.0005997942
BMO        2.417847e-04  6.519278e-05  2.016895e-03 0.0004096999
MDS        1.373105e-03  5.997942e-04  4.096999e-04 0.0068809250
Petro.Can  1.934113e-03  2.443166e-04 -2.739006e-04 0.0015499161
RIM        4.814946e-05  2.550559e-03  7.581760e-04 0.0022449750
```

포트폴리오 구성

- k개의 자산에 분산 투자할 수 있도록 각 자산의 가중치 합이 1이 되도록 구성한 내용
- 각 자산의 수익률을 R_k 이라 하면 $P=\sum_{i=1}^{k} w_i R_i$, $\sum w_i = 1$
- 최대 수익, 최소 위험을 얻도록 포트폴리오를 구성하는 것이 목표

Notation

기호 $i = 1,2,...,n$ (자산의 개수)

자산 : K_i - 자산 벡터 $\underline{k} = \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ \cdots \\ K_n \end{pmatrix}$

자산 벡터 기대수익률 $E(\underline{k}) = \underline{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \cdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$, 공분산 행렬 $COV(\underline{k}) = \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & & \sigma_{2n} \\ & & & \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & & \sigma_{nn} \end{pmatrix}$

자산 수익률 : R_i

자산 가중치 : w_i - $\underline{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \cdots \\ w_n \end{pmatrix}$

포트폴리오 : $V = \sum w_i K_i$ ($V = \underline{w}'\underline{k}$), 실현 가능한 (feasible) 포트폴리오 $\sum w_i = 1$ ($\underline{w}'\underline{1} = 1$)

포트폴리오 $\underline{w}'\underline{k}$ 기대 수익률 및 위험(분산)

기대 수익률 : $E(V) = \underline{w}'\underline{\mu}$

분산 : $V(V) = \underline{w}'\Sigma\underline{w}$

최소분산(위험) 포트폴리오 (Minimum Variance Portfolio) 구성

$\min\limits_{\underline{w}} \underline{w}'\Sigma\underline{w}$ subject to $\underline{w}'\underline{1} = 1$

By Lagrange Multiplier Method, $\underline{w}_{MVP} = \dfrac{\underline{1}'\Sigma^{-1}}{\underline{1}'\Sigma^{-1}\underline{1}}$

각 자산의 기대수익률(μ_i)과 공분산 행렬(Σ)은 데이터로 추정 가능하다. 표본 기대수익률(R_i)과 표본 공분산행렬(S)을 이용하면 된다.

예제 - 포트폴리오.csv : 최소분산 포트폴리오

만약 자산의 기대 수익이 음이면 포트폴리오 구성의 의미가 없음

ds=na.omit(read.csv("포트폴리오.csv"))
names(ds)
K=as.matrix(ds)
one0=as.matrix(rep(1,nrow(ds)))
E=t((1/nrow(ds))%*%(t(one0)%*%K)) #expected revenue
S=cov(K) #covariance matrix
one=as.matrix(rep(1,nrow(S)))
W=(1/sum(t(one)%*%solve(S)))%*%(t(one)%*%solve(S))
#Minimum Variance Portfolio
ER=W%*%t(E) #expected revenue
VR=sqrt(W%*%S%*%t(W)) #variance of revenue
	GE GM McDonalds Motorola
	[1,] 0.574 0.096 0.226 0.101
	
	57%, 9.6%, 22.6%, 10.1%
	
	위의 가중치가 MVP임

> W=(1/sum(t(one2)%*%solve(S)))%*%(t(one2)%*%solve(S)) > E%*%t(W) [1,] 0.003010181 > sqrt(W%*%S%*%t(W)) [1,] 0.05088227	위와 같이 투자하면 기대 수익율은 0.3%이고(μ_v) 표준편차(위험)은 5%이다. (σ_v^2)

최소분산(위험) 가중치는 $\underline{w}_{MVP} = \begin{pmatrix} 0.57 \\ 0.096 \\ 22.6 \\ 10.1 \end{pmatrix}$ ---(1)

효율적 투자선

우세 (Dominant) 정의

임의의 자산(포트폴리오)이 비교 자산에 비해 기대 수익율이 높고 표준편차(위험)가 낮은 경우 해당 자산은 비교 자산보다 우세하다고 한다.

효율적 efficient 정의

임의의 포트폴리오보다 우세한 포트폴리오가 없다면 해당 포트폴리오는 효율적이라 하고, 모든 실현 가능한 포트폴리오 중 효율적인 포트폴리오 부분집합을 효율적 투자선 frontier 라고 한다.

등기대선 isoyxpected lines

모든 실현 가능한 포트폴리오 집합을 등기대선이란 한다.

등기대선 위에 있는 모든 포트폴리오들은 그들 가운에 최소분산을 가지는 포트폴리오에 대해 열세이다.

최소분산선 Minimum Variance Line

기대 수익 μ_v 로 하는 포트폴리오 집합을 V라고 하자. 이 집합 안에 있는 포트폴리오가 동일한 기대 수익을 갖는 다른 포트폴리오에 비해 분산이 같거나 적을 경우 이 집합을 최소분산선 MVL 이라 한다.

$\min_{\underline{w}} \underline{w}'\Sigma\underline{w}$ subject to $\underline{w}'\underline{1}=1, \underline{w}'\underline{\mu}=\mu$

By Lagrange Multiplier0 Method, $2\underline{w}=\lambda_1\underline{\mu}'S^{-1}+\lambda_2\underline{1}'S^{-1}$, $\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{pmatrix}=2M^{-1}\begin{pmatrix}\mu_v\\ 1\end{pmatrix}$ => 두 식을 활용하여 $\underline{w}=\mu_v\underline{b}+\underline{a}$

최소분산선 위(동일 최소분산=동일 위함 만족)에 있는 가중치(포트폴리오)는 다음 조건을 만족한다.

$$\underline{b}=(1/2)*(M^{-1}[1,1]*\underline{\mu}'S^{-1}+M^{-1}[2,1]*\underline{1}'S^{-1})$$
$$\underline{a}=(1/2)*(M^{-1}[1,2]*\underline{\mu}'S^{-1}+M^{-1}[2,2]*\underline{1}'S^{-1})$$
=> $\underline{w}_{MVL}=\begin{pmatrix}0.911\\0.176\\-0.076\\-0.0103\end{pmatrix}+\mu_V\begin{pmatrix}-111.69\\-26.46\\100.84\\37.31\end{pmatrix}$ ~ (2)

기대수익률이 μ_V 이면서 최소분산 위의 포트폴리오 가중치 분산(위험)은 다음과 같다.

$$\sigma_V^2=\underline{w}_{MVL}'S\underline{w}_{MVL}=\underline{a}'\underline{a}+2\underline{a}'\underline{b}\mu_V+\underline{b}'\underline{b}\mu_V^2$$

그러므로 표준편차는 $\sigma_v=\sqrt{0.0033-0.518\mu_v+86.1\mu_v^2}$ ~ (3)

포트폴리오 가중치

- 식 (1)의 가중치는 Minimum Variance Portfolio로 최소 위험 가중치이다. (여기서는 기대수익 개념 없음)
- 식 (2)의 가중치는 기대수익이 μ_V 이면서 최소 위험 가중치이므로 가중치가 μ_V 의 함수이다. 예를 들면 기대 수익을 1% 얻으려고 한다면 최소 위험

M=matrix(c(t(E)%*%solve(S)%*%E,t(one)%*%solve(S)%*%E,
t(E)%*%solve(S)%*%one,t(one)%*%solve(S)%*%one),
nrow=2,byrow=T)
M2=2*solve(M)
b=0.5*(M2[1,1]*t(E)%*%solve(S)+(M2[2,1])%*%t(one)%*%solve(S)) #b
a=0.5*(M2[1,2]*t(E)%*%solve(S)+(M2[2,2])%*%t(one)%*%solve(S)) #a
a%*%S%*%t(a) #contant
2*a%*%S%*%t(b) #uv
b%*%S%*%t(b)   #uv^2
a+0.001%*%b #MVP with 1% expected revenue
	> B
	GE GM McDonalds Motorola
	-111.6 -26.4 100.8 37.3
	> A
	GE GM McDonalds Motorola
	0.911 0.17 -0.076 -0.01
	
	>#contant 0.003369275
	>#uv -0.5184201
	>#uv^2 86.11112

$$\underline{w}_{MVL} = \begin{pmatrix} 0.911 \\ 0.176 \\ -0.076 \\ -0.0103 \end{pmatrix} + 0.01 * \begin{pmatrix} -111.69 \\ -26.46 \\ 100.84 \\ 37.31 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.21 \\ -0.08 \\ 0.93 \\ 0.36 \end{pmatrix}$$ -> 가중치가 음수이므로 가능한 포트폴리오를 구성할 수 없다. -> feasible 하지 않음

만약 기대 수익율을 0.6%로 하면, $\underline{w}'_{MVL} = (0.24, 0.017, 0.528, 0.214)$ ~ (4)

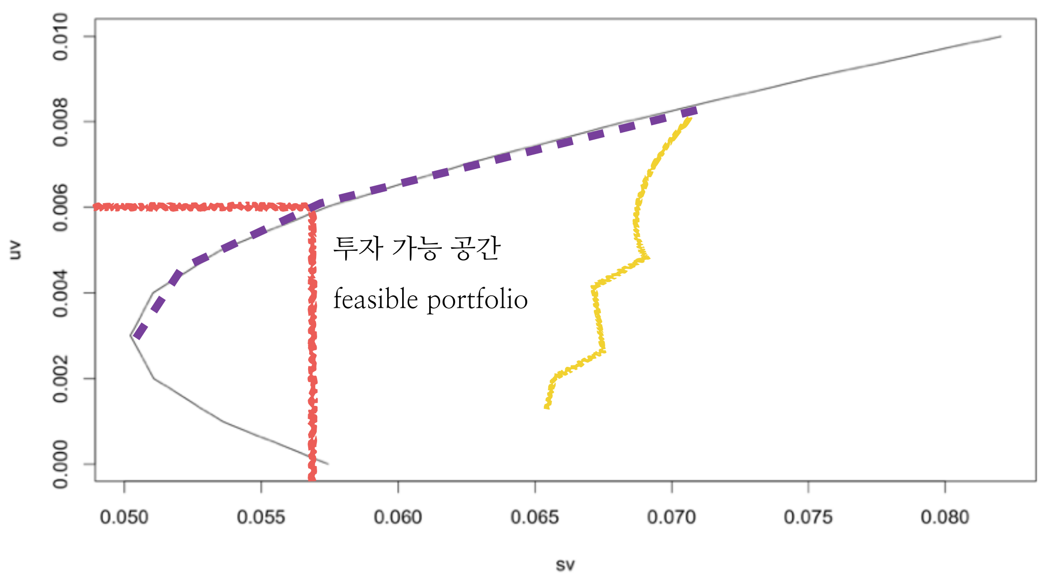
Feasible Portfolio

MVL : (y-축 = μ_V , x-축 σ_V)을 그리자.

efficient set (효율적인 투자선) : MVL(포물선 형태를 가지고 있고 포물선 선 상의 값이 투자 최적 포트폴리오임) 에서 위 부분에 해당되는 부분(보라색 선-효율적인 투자선), 이 선상에서 포트폴리오를 구성해야 최소분산을 갖는다. 식(4)의 가중치가 0.6% 수익율을 가지며 최소분산 포트폴리오를 구성한다.

efficient set에서는 기대수익이 증가하면 위험(표준편차)도 증가하게 된다.

uv0=0.006 sqrt(0.0033-0.518*uv0+86.1*uv0**2)	표준편차(위험) = 0.057 (5.7%), 기대수익 0.6%인 경우



무위험 자산과 위험자산 포트폴리오 구성

평균-분산 포트폴리오 이론

위험자산(MVL 포트폴리오 선 상, 수익 μ_V)의 가중치 w, 무위험자산(수익 μ_F)에 (1-w) 가중치를 준 포트폴리오 구성하였다고 하자. 새로운 포트폴리오의 수익은 $R_{New} = wR_V + (1-w)R_F$

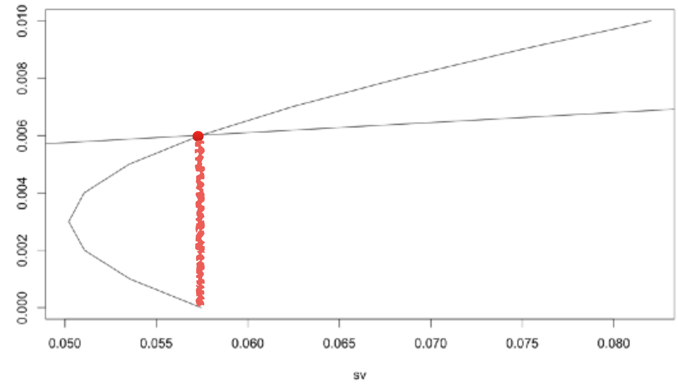
- 새 포트폴리오의 기대수익 : $E(R_{New}) = wE(R_V) + (1-w)R_F$ ~ (7)
- 새 포트폴리오의 분산 : $V(R_{New}) = w^2 V(R_V) = w^2 \sigma_V^2$ ~ (5)
- 그러므로 $E(R_{New}) = \mu_{V_{new}} = R_F + w(E(R_V) - R_f) = R_F + \sqrt{\dfrac{\sigma_{V_{new}}^2}{\sigma_V^2}}(E(R_V) - R_F) = R_F + \dfrac{\sigma_{V_{new}}}{\sigma_V}(\mu_V - R_F)$
- (선형) 포트폴리오 선 : $\mu_{V_{new}} = R_F + \dfrac{(\mu_V - R_F)}{\sigma_V}\sigma_{V_{new}}$

(예제) 투자 자산의 기대수익을 0.006(μ_V), 표준편차 0.057(σ_V)이고 무위험 자선 수익률을 0.4%(R_F)라 하면,

선형의 포트폴리오 : $\mu_{V_{new}} = 0.004 + 0.00351\sigma_{V_{new}}$ ~ (6)

uv=seq(0,0.01,0.001); sv=sqrt(0.0033-0.518*uv+86.1*uv**2) plot(uv~sv,type="l") abline(a=0.004,b=0.002/0.057)	μnew=0.00417 (계산실수, 수정) E(R_{new}) w=0.091 (위험자산 가중치)

- 식(3)과 식(6)를 같게 놓고 빨간 점 ($\mu_{V_{new}}$, $\sigma_{V_{new}}$) 를 구한 후 식 (7)를 넣으면 위험자산의 가중치 w=0.091를 구할 수 있다.
- 위험자산의 가중치는 9.1%이고 무위험자산의 가중치는 90.7%이다.
- 위험자산의 가중치가 낮은 이유는 위험(표준편차)이 높아 5.18% (수익은 0.417%인데) 위험자산 투자 가중치가 낮음



포트폴리오 구성 절차

- 위험자산들로 MVL과 가중치 $\underline{w}$ (1) - (식(4))에 의해 구하고 가중치의 평균수익과 표준편차 구함
- 위험자산과 무위험자산의 가중치를 구한다. 위험자산 가중치 w=0.091, 무위험자산 가중치 (1-w)=0.907
- 그러므로 위험 자산들의 가중치는 (1)*(2)가 최종 가중치이다. $0.091*(0.24, 0.017, 0.528, 0.214)$