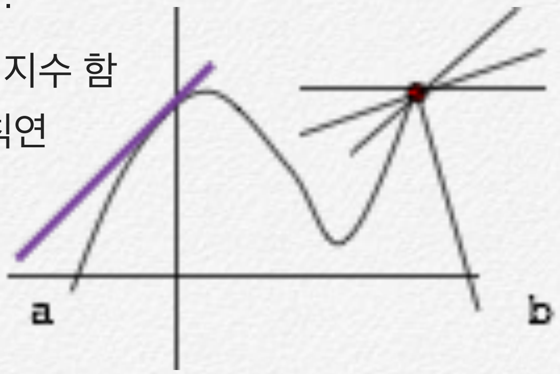
미분 Derivative

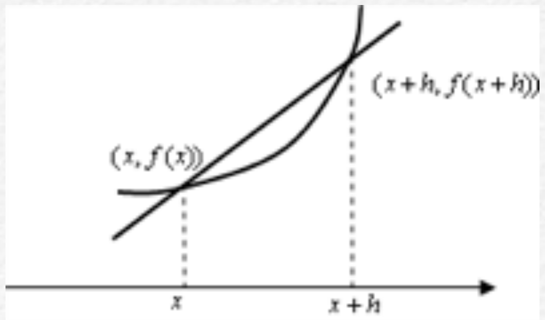
미분 개념

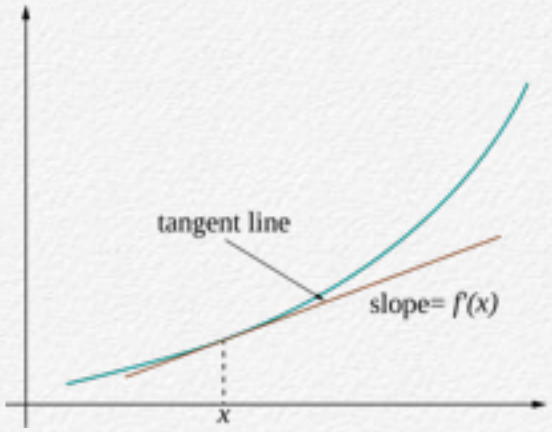
- 미분은 함수의 임의 점에서 접선의 기울기 - 순간 변화율, 자동차 속력,
- 미분이 가능한 함수를 미분가능 (differential) 함수라 하고 미분 값을 구하는 과정을 미분(Differentiation)이라 한다.
- 미분 가능한 함수는 다항 함수, 로그 함수, 지수 함수, 삼각 함수, 그리고 미분가능 함수 사칙연산의 함수 등으로 통계학에서 주로 사용하는 함수
- 미분 가능하면 연속이지만 연속 함수라고 미분 가능한 것은 아님



미분 정의

함수 $y = f(x)$의 임의의 한 점 에서 미분을 $f'(x),\ y'(x),\ \dfrac{df}{dx}, \dfrac{dy}{dx}$ 표현하고 다음과 같이 정의한다. $f'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$





임의의 한 점 $(x_0, f(x_0))$에서 미분 값 $f'(x_0)$는 기울기이다.

미분 규칙

규칙1

만약 c가 상수이면 $f(x) = c$ 의 미분은 $f'(x) = 0$ 이다.

규칙2

만약 n이 양의 정수이면 $f(x) = x^n$ 의 미분은 $f'(x) = nx^{n-1}$

규칙 1+2

(a, c) 상수이면 $f(x) = a + cx^n$의 미분은 $f'(x) = cnx^{n-1}$

규칙3

규칙2는 n이 음의 정수인 경우에도 성립하고 분수인 경우에도 성립한다.

|연습문제| 미분하시오.

$(1) y = \dfrac{2}{x}$ $\qquad$ $(2) y = \sqrt[3]{x}$ $\qquad$ $(3) y = -\dfrac{4}{x^3}$

Chain Rule 연쇄 규칙

만약 $u(x)$가 x의 함수이면, $f(x) = (u(x))^n$ 의 미분은 $f'(x) = n(u(x))^{n-1}u'(x)$ 이다.

다른 측면에서 이를 Inside-outside 규칙이라 한다.

안 (1)바깥 미분

(예) $\frac{d}{dx}\sin(x^2+x) = \cos(x^2+2)(2x+1)$

바깥 (2)안 그대로 (3)안 미분

|연습문제| 미분하시오.

$(1)y = 5(3x^2 - x)^2$ $(2)y = \frac{1}{\sqrt[3]{2x^2 - 1}}$

합 미분 규칙

만약 $u(x), v(x)$가 모두 x의 함수이면 $u(x) + v(x)$의 미분은

$$u' + v' = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

곱 미분 규칙

만약 $u(x), v(x)$가 모두 x의 함수이면 $u(x)v(x)$의 미분은

$$u'v + uv' = \frac{du}{dx}v + u\frac{dv}{dx}$$

곱 미분 규칙

만약 $u(x), v(x)$가 모두 x의 함수이면 $\frac{u(x)}{v(x)}$의 미분은

$$\frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{du}{dx}v + u\frac{dv}{dx} \Leftrightarrow (uv^{-1})' = u'v^{-1} - uv^{-2}v' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

|연습문제| 미분하시오.

$(1)y = (\sqrt{x} - 2)(3x^2 - x)^2$ $(2)y = \frac{x^3}{2} - \frac{2}{x} + \sqrt[3]{x}$

$(3)y = \frac{\sqrt{x}}{(1 + x^2)}$ $(4)y = x^2(x + 5 + \frac{1}{x})$

특수 함수 미분

로그함수

x의 함수 $u(x)$인 경우 함수 $\log_a^{u(x)}$의 x에 대한 미분은

$$(\log_a^{u(x)})' = \frac{d(\log_a^{u(x)})}{dx} = \log_a^e(\frac{1}{u(x)})u'(x)$$

- 만약 $u(x) = x$인 경우 $(\log_a^x)' = \log_a^e(\frac{1}{x})$
- 만약 밑(base)이 $a = e$인 경우 $(\ln^{u(x)})' = (\frac{1}{u(x)})u'(x)$ (*) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

지수함수

x의 함수 $u(x)$인 경우 함수 $a^{u(x)}$의 x에 대한 미분은

$$(a^{u(x)})' = \ln^a(u(x))(u'(x))$$

- 만약 $u(x) = x$인 경우 $(a^x)' = \log_a^x$
- 만약 밑(base)이 $a = e$인 경우 $(e^{u(x)})' = e^{u(x)}(u'(x))$ (*) $(e^x)' = e^x$

|연습문제| 미분하시오.

$(1) y = 2\ln(3x^2 - 1)$　　$(2) y = \ln(1 - 2x)^3$

$(3) y = \dfrac{e^x}{2x - 3}$　　$(4) y = \left(2e^{x^2 - \sqrt{x}} + x^3\right)^2$

2차 미분 second derivative

정의

1차 미분함수를 x에 대하여 한 번 더 미분한 함수를 2차 미분함수

$f'' = (f')'$ 혹은 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$

활용

1차 미분이 기울기(속력)이라면 2차 미분은 기울기 변화(가속도)이다.

In R

1) $y = 2x^2 - 3\sqrt{x} + \ln(2x^2) + e^{\sqrt{x}/3}$을 x에 대해 미분하시오.

```
library(Ryacas)
fx=expression(2*x^2-3*sqrt(x)+log(2*x^2)+exp(sqrt(x)/3))
D(fx,"x")
```

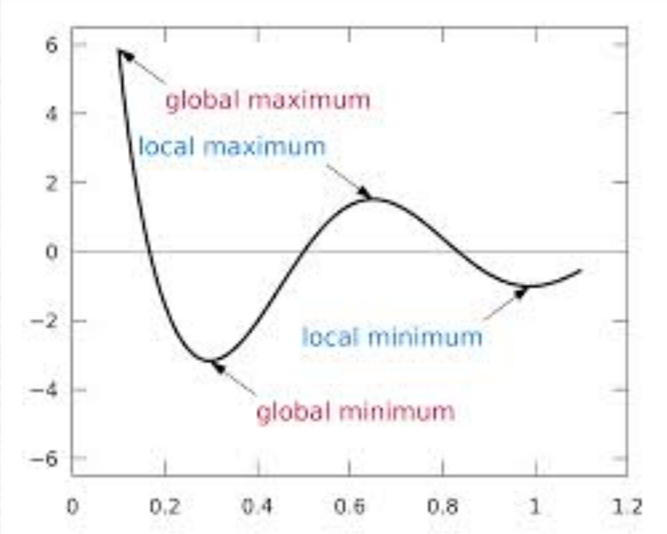
```
> D(fx,"x")
2 * (2 * x) - 3 * (0.5 * x^-0.5) + 2 * (2 * x)/(2 * x^2) + exp(sqrt(x)/3) *
    (0.5 * x^-0.5/3)
```

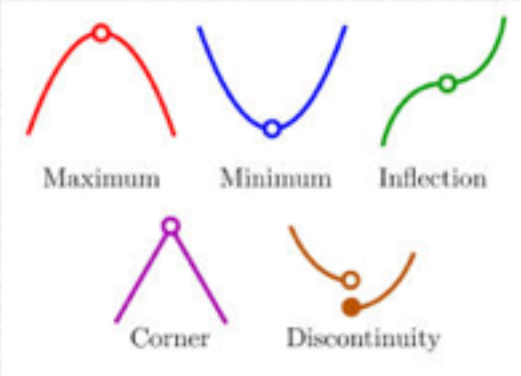
2) $y = 2x^2 - \sqrt{x}$을 x에 대해 2차 미분하시오.

```
fx=expression(2*x^2-sqrt(x))
D(fx,"x") # 1차 미분
D(D(fx,"x"),"x")  #2차 미분
```

```
> fx=expression(2*x^2-sqrt(x))
> D(fx,"x")
2 * (2 * x) - 0.5 * x^-0.5
> D(D(fx,"x"),"x")
2 * 2 - 0.5 * (-0.5 * x^-1.5)
```

미분 활용 : 최대값 & 최소값





전역 global : 함수의 x 정의된 전 구간 (영역)에서 최대 혹은 최소

지역 local : 일정 임의 구간에서 함수의 봉우리가 발생하여 최대 혹은 최소

증가/감소 함수

(정의) $x_2 > x_1$일 때 $f(x_2) > f(x_2)$이 성립하면 $f(x)$는 증가함수 increasing

(정의) $x_2 > x_1$일 때 $f(x_2) \geq f(x_2)$이 성립하면 $f(x)$는 비감소 non-decreasing

(정의) $x_2 > x_1$일 때 $f(x_2) < f(x_2)$이 성립하면 $f(x)$는 감소함수 decreasing

(정의) $x_2 > x_1$일 때 $f(x_2) \leq f(x_2)$이 성립하면 $f(x)$는 비감소 non-increasing

1차 미분 정리

함수 $f(x)$ 가 일정 구간 안의 모든 점에서 미분 가능하고 구간 내 임의의 점 c 에서 1차 미분이 0이면($f'(c) = 0$) 함수 $f(x)$는 점 $(c, f(c))$ 에서 (지역) 최대값, 최소값 혹은 변곡점 갖는다.

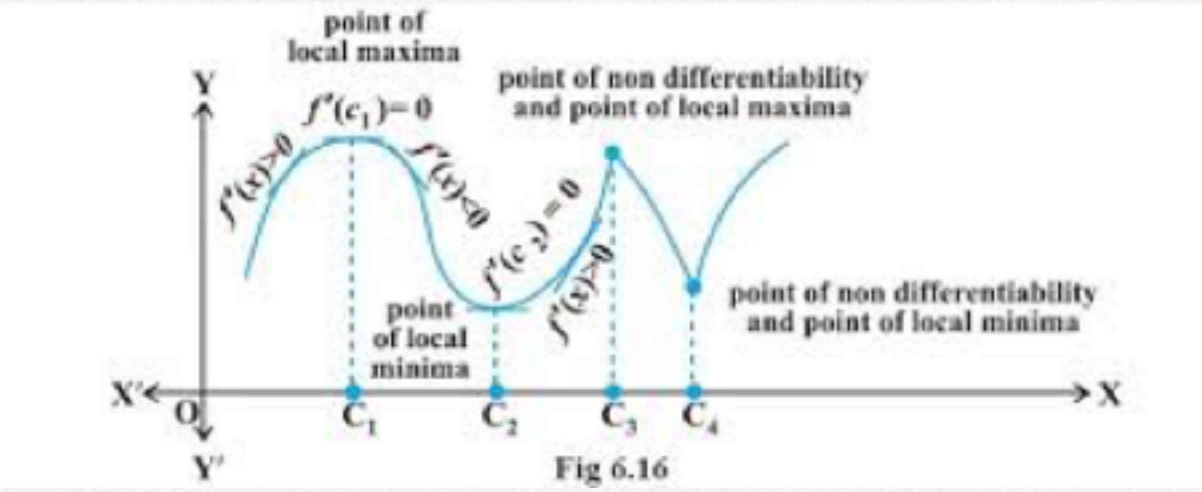


Fig 6.16

1차 미분과 증가 함수 관계 정리

함수 $f(x)$ 에 대해 $f'(x) > 0$이면 증가함수이고 $f'(x) < 0$이면 감소함수이다.

1차 미분 y'

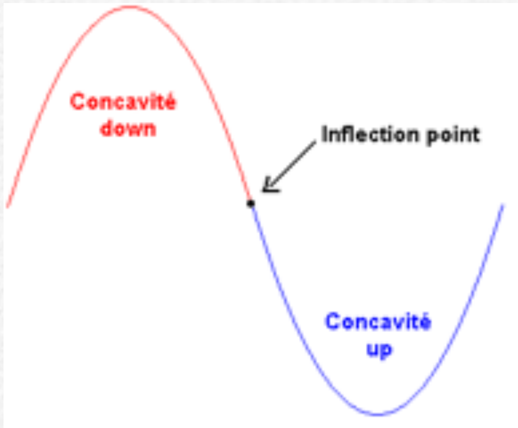
1차 미분이 0인 점에서 최대, 최소 혹은 변곡이 발생한다.

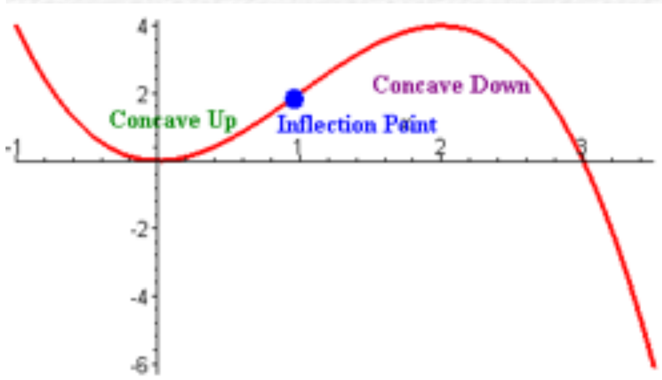
2차 미분 y''

1차 미분(기울기)의 변화율이므로 기울기가 감소하면 2차 미분 값은 음이고 기울기가 증가하면 2차 미분 값은 양이다.

오목성(Concavity)

만약 y' 의 기울기가 감소하면 함수 $y = f(x)$ 는 concave down($y'' < 0$), 만약 y'의 기울기가 증가하면 함수 $y = f(x)$는 concave up($y'' > 0$) 이라 한다. 만약 concavity가 변하는 점이 있으면 이 점을 변곡점(inflection point)이라 한다. 변곡점에서는 $y'' = 0$이 성립한다.

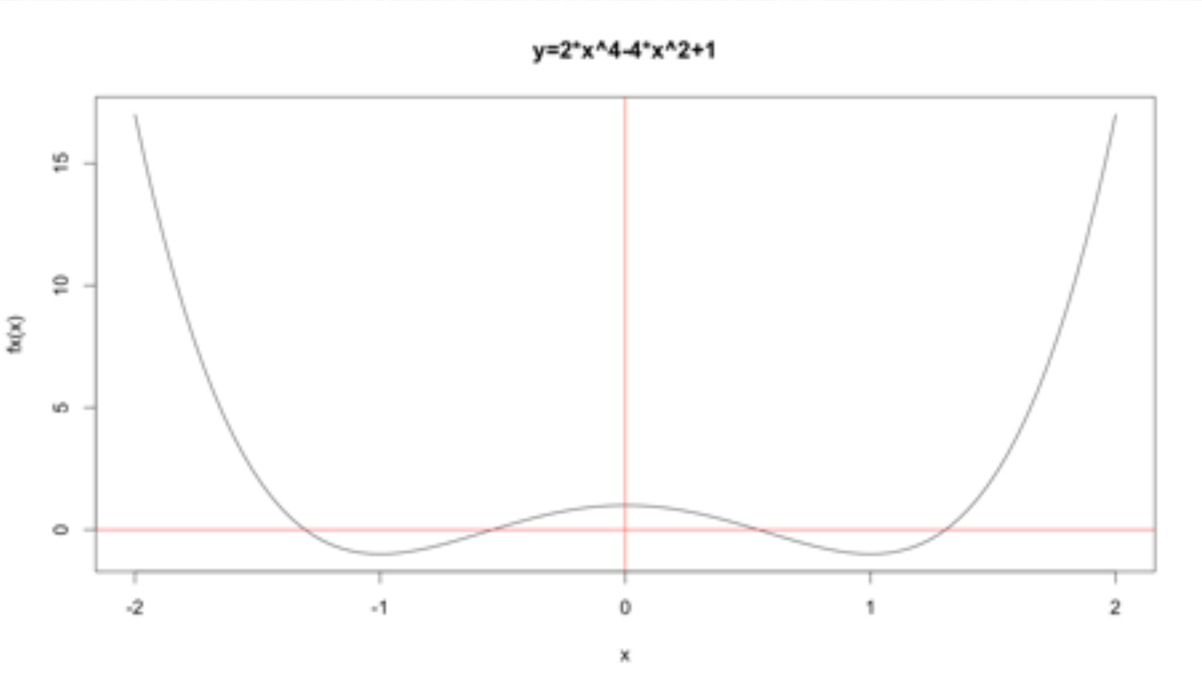




1차 미분과 2차 미분을 이용한 최대, 최소

- 만약 $f'(c) = 0$ 이고 $f''(c) < 0$이면 함수 $f(x)$ 는 점 $(c, f(c))$에서 (지역) 최대값 $f(c)$ 을 갖는다.
- 만약 $f'(c) = 0$ 이고 $f''(c) > 0$이면 함수 $f(x)$ 는 점 $(c, f(c))$에서 (지역) 최소값 $f(c)$ 을 갖는다.
- 만약 $f'(c) = 0$ 이고 $f''(c) = 0$이면 함수 $f(x)$ 는 점 $(c, f(c))$가 변곡점이다.

```
fx=function(x){2*x^4-4*x^2+1}
curve(fx(x),-2,2, main="y=2*x^4-4*x^2+1")
abline(v=0,h=0,col="red")
```




```
library(rootSolve)
uniroot.all(fx,c(-10,10))
```

```
> library(rootSolve)
> uniroot.all(fx,c(-10,10))
[1] -1.3065625 -0.5411859  0.5411859  1.3065625
```

```
library(Ryacas)
fx=expression(2*x^4-4*x^2+1)  #미분함수 구하기
D(fx,"x") #1차미분
D(D(fx,"x"),"x") #2차미분
```

```
> D(fx,"x") #1차미분
2 * (4 * x^3) - 4 * (2 * x)
> D(D(fx,"x"),"x") #2차미분
2 * (4 * (3 * x^2)) - 4 * 2
```

```
library(rootSolve)
fp=function(x){2 * (4 * x^3) - 4 * (2 * x)}  #1차 미분 해 구하기
uniroot.all(fp,c(-10,10))
f2p=function(x){2 * (4 * (3 * x^2)) - 4 * 2}
f2p(c(-1,0,1)) #2차 함수 값 (최대 혹은 최소, 변곡점 확인)
```

```
> fp=function(x){2 * (4 * x^3) - 4 * (2 * x)}
> uniroot.all(fp,c(-10,10))
[1] -1  0  1
> f2p=function(x){2 * (4 * (3 * x^2)) - 4 * 2}
> f2p(c(-1,0,1))
[1] 16 -8 16
```

```
f=function(x){2*x^4-4*x^2+1} #원 함수 f(x) 지정
f(c(-1,0,1)) #최대값, 최소값 계산
```

그러므로 $x = -1, 1$에서 최소값 -1, $x = 0$에서 최대값 1을 갖는다.

```
> f=function(x){2*x^4-4*x^2+1}
> f(c(-1,0,1))
[1] -1  1 -1
```

|연습문제| 다음 함수를 그리고 존재한다면 (최대값, 최소값, 변곡점) 계산

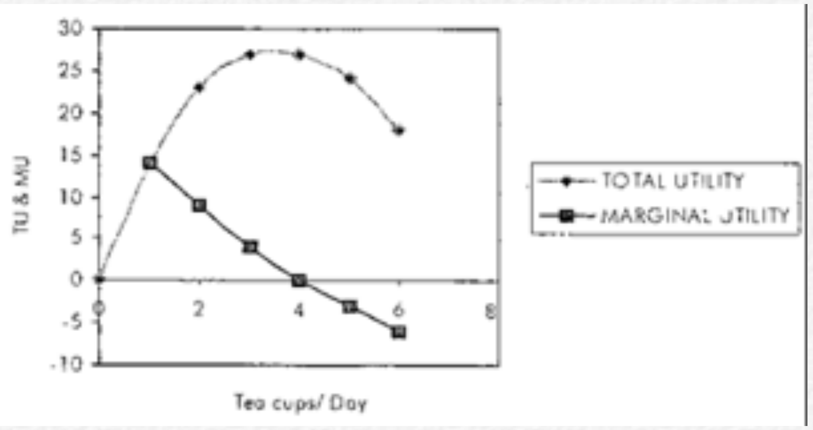
$(1) y = x^3/3 - x^2/2 - 2x + \frac{1}{3}$ $\qquad$ $(2) y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-3)^2}{2}}$

미분 활용

경제학

Law Of Diminishing Marginal Utility 한계효용 체감의 법칙

제품을 하나 소비할 때마다 한계 효용(제품으로부터 얻는 가치)은 감소한다.



효용(utility)은 소비자가 재화나 서비스를 소비할 때 느끼는 주관적인 만족을 의미한다. 효용함수는 (utility function) 재화 혹은 서비스 소비량 x와 효용의 관계를 함수형태로 나타낸 것으로 $u(x)$ 로 나타낸다.

Cobb-Douglas Production function

$Y = f(L, K) = AL^{\alpha}K^{\beta}$ (L=노동, K=자본), 모수 A, α, β

양변에 로그를 취하면 $\ln(Y) = \ln(A) + \alpha \ln(L) + \beta \ln(K)$

모수 α, β - 한계 : (노동, 자본) 한단위(ln(L), LN(K)) 증가했을 때 생산량 (ln(Y))은 (α, β) 만큼 증가한다.

경영학

A회사에서 냉장고를 생산하는데 소요되는 비용 함수를 $c(x)$ 라 하자. x 는 제품 생산량이다. 비용이 cost이므로 f 대신 c를 사용한 것 뿐이다.

제품 생산량을 q, 비용함수를 $c(q) = q^3 - 6q^2 + 15q$라 하자.

현재 하루 10개 생산하고 있는데 1개를 더 만들 때 드는 비용(이를 한계비용)을 구하시오. 즉, $c'(10) = 3q^2 - 12q + 15 \Big|_{q=10} = 195$

|연습문제|

제품 생산량을 q, 수익함수를 $r(q) = 2000(100 + 30q - x^2)$라 하자.

(1) 현재 5개 만들고 있는데, 1개 더 만들 때 증가하는 한계수익은?

(2)최대 수익을 얻으려면 몇 개를 만들어야 할까?

|연습문제|

정원이 60명인 버스승객 수를 x 명이라할때 요금은 $p(x) = (3 - \frac{x}{20})^2$ (승객당)받는다. 버스가 최대 수익을 위해서는 승객이 몇 명 탑승해야 하는지 구하시오.

자유낙하 법칙 (연습문제)

자유 낙하의 법칙 : 물체가 떨어진 후 시간을 t(초)라 할 때 낙하 거리함수는

$s(t) = \frac{1}{2}gt^2$ (단위 m), gravity, $g = 9.8(m/\text{sec})$

(1) 자유 낙하 후 15m 거리에 도달하는 시간

(2) 물체가 자유낙하 3초 후 속력과 가속력을 구하시오.

Newton 운동에너지 : 속력 (단위 m/s)로 직선운동을 하는 질량 m (단위 Kg)인 물체의 운동에너지는 $E = \frac{1}{2}mv^2$ (단위 kJ)

(3) 질량 60Kg인 바위를 낙하 했을 때 3초 후 운동 에너지를 구하시오.

낙하 법칙 (연습문제)

질량 80kg 바위를 로켓처럼 하늘로 수직으로 쏘아 올렸을 때 시간 t에 도달하는 수직 거리함수를 $s(t) = 160t - 16t^2$이다.

(1) 가장 높이 올라 갔을 때는 언제인가?

(2) 256 높이에서 바위의 속력과 운동 에너지를 구하시오.

편미분 (partial differentiation)

함수 f 가 x 만의 함수가 아니라 여러 변수의 함수일 때 각 변수에 대해 미분하는 것을 편미분 한다고 한다. 편미분의 경우 해당변수를 제외하고 다른 변수는 상수로 간주한다. 편미분 기호는 ∂ 이다.

(w, x, z)의 함수 $y = f(w, x, z)$라 하면 x 의 편미분은 다음과 같이 정의한다.

(정의) $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial f(w, x, z)}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(w, x+h, z) - f(w, x, z)}{h}$

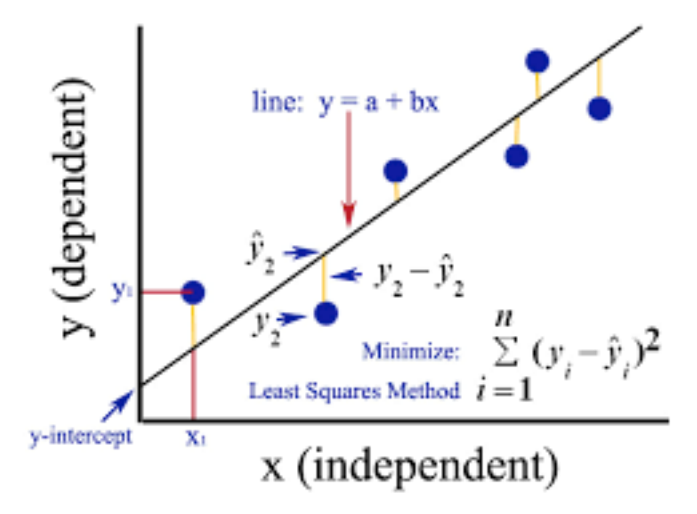
통계학 응용 Ordinary Least Square

수학 직선(선형) 모형 : $Y = a + bX$, Y(output)는 X(input)의 함수

통계 회귀 모형 : $Y = a + bX + e$

- Y, X 관측치
- 모수 (a, b) - fixed but unknown
- 통계 오차 e - 통계방법론에서는 가정 $e \sim N(0, \sigma^2)$

회귀분석이라 함은 (x, y) 관측치(그림의 파란점)을 활용하여 관측점들을 대표하는 적합직선($\hat{Y} = \hat{a} + \hat{b}X$, fitted line)을 구하고, 이를 이용하여 통계적 귀무가설 $H_0 : b = 0$을 검정하여 가설이 기각되면 (X, Y)는 직선의 함수관계를 갖는다고 한다.



관측치 고려한 통계모형 $Y_i = a + bX_i + e_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$ - (1)

어떻게 관측값을 대표하는 최적 직선을 구할까?

Karl Pearson은 오차합을 최소화 하는 방법 생각 - 그러나 오차 합은 0

하여, 오차제곱(절대값보다는 수리적 편리, 직선과 멀수록 제곱 비례 체널티)합을 최소화 하는 $(\hat{a}, \hat{b})$ 추정 - 이를 최소자승추정법(OLS)

$$\min_{(a,b)} \sum_{i}^{n} e_i^2 = Q(a,b) = \min_{(a,b)} \sum_{i}^{n} (y_i - a - bx_i)^2$$

$$\hat{b} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2},\ \hat{a} = \bar{y} - \bar{\beta}\bar{x}$$

행렬 모형

1) 식 (1)을 $\underline{y} = X\underline{b} + \underline{e}$로 표현하자. 모수 벡터 $\underline{b} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$이다.

2) $\sum_{n}^{i} e_i^2$을 오차벡터로 표시해 보자

3) OLS 추정치를 행렬로 구해보자. (행렬 미분 참고)

|예제 데이터|

Temperature	Ice Cream Sales
85	$200
71	$160
84	$170
66	$120
77	$120
75	$180
68	$100
91	$230

```
Call:
lm(formula = Ice ~ Temp)

Coefficients:
(Intercept)         Temp
   -163.410        4.193
```

```
Temp=c(85,71,84,66,77,75,68,91)
Ice=c(200,160,170,120,120,180,100,230)
lm(Ice~Temp)
```