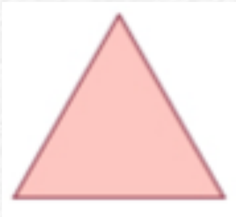
적분 integral

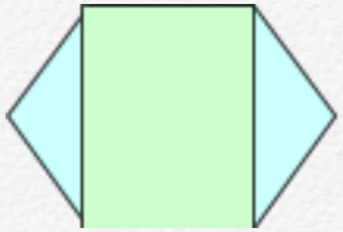
개념

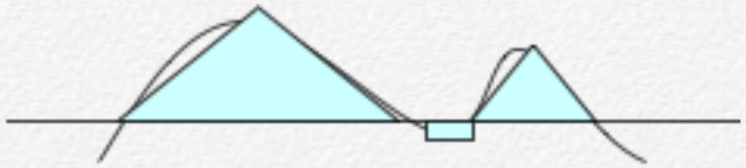
고대 수학자들의 면적 구하기

- 사각형의 면적(밑변×높이)
- 삼각형 면적(밑변×높이/2)
- 평행 사변형의 면적(Euclid geometry (밑면×높이)
- 사다리꼴의 면적 ((윗변+아래변)*높이/2)

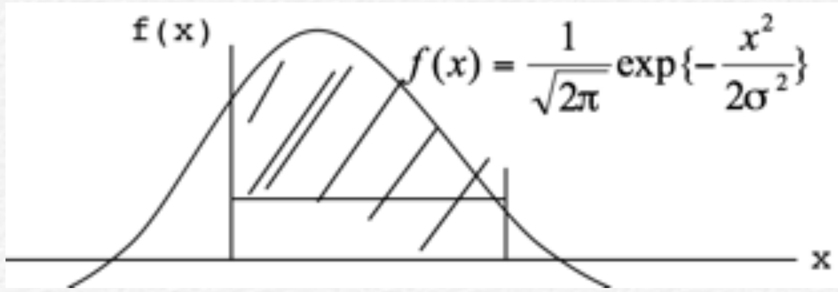


Archimedes는 곡선의 면적을 이미 알려진 다각형, 삼각형의 면적으로 근사 시켜 구하는 방법을 생각하였다. 이것이 면적에 대한 현재 정의의 근간이 된다.





통계학 활용



통계학에 있어서 적분이 이용되는 곳은 확률 계산이다.

부정 적분 infinite integral

만약 함수 $f(x)$ 의 모든 정의역(x의 범위)에서 $F'(x) = f(x)$ 이라면 함수 $F(x)$ 는 $f(x)$ 의 역-미분 (anti-derivative), 적분함수라 한다. 이처럼 적분은 미분의 역이다.

그러므로 적분의 결과를 미분하면 원 적분함수가 된다.

정의

만약 함수 $f(x)$가 미분 가능하다면, 함수 $f(x)$의 모든 역-미분 함수를 함수 $f(x)$에 대한 부정 적분(indefinite integral with respect to x)라 정의한다.

기호 : $\int f(x)dx$ - $\int$ (integral)은 적분 기호이며, dx 의 의미는 함수 $f(x)$를 x에 대해 적분한다는 것임

규칙 : $constant : (a, k)$

(1) $\int f(x)dx = F(x) + c$

(2) $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$

(3) $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

(4) $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$ (역미분 개념) 단, n=-1이면 $\ln(x)$

(5) $\int a^x dx = \frac{1}{\ln(a)}a^x + c$ =>(special case) (6) $\int e^x dx = e^x + c$

연습문제

(1) $f(x) = 6x^{-3} + 2x + 3$

(2) $f(x) = 2\sqrt{x}$

(3) $f(x) = x^{-2/3}$

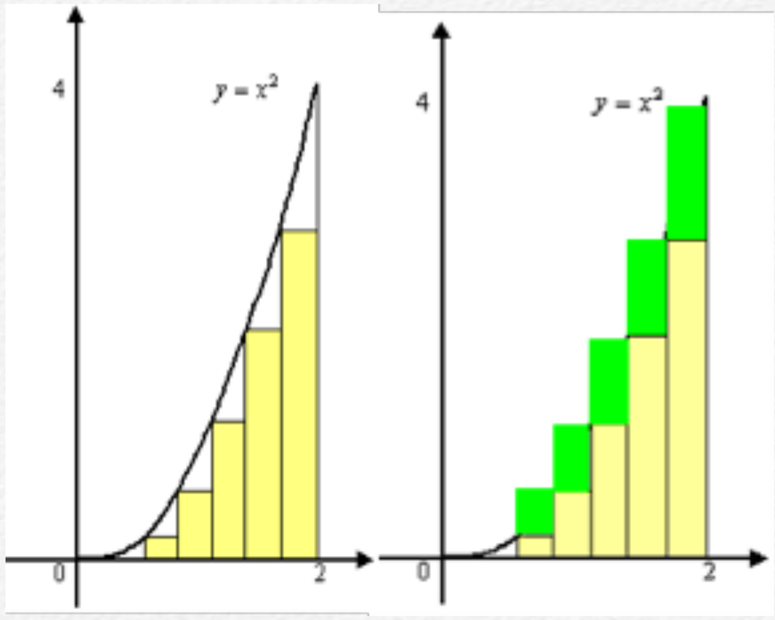
(4) $f(x) = \dfrac{2}{x^3}$

(5) $f(x) = 2 - \dfrac{5}{x^2}$

정적분 definite integral

개념

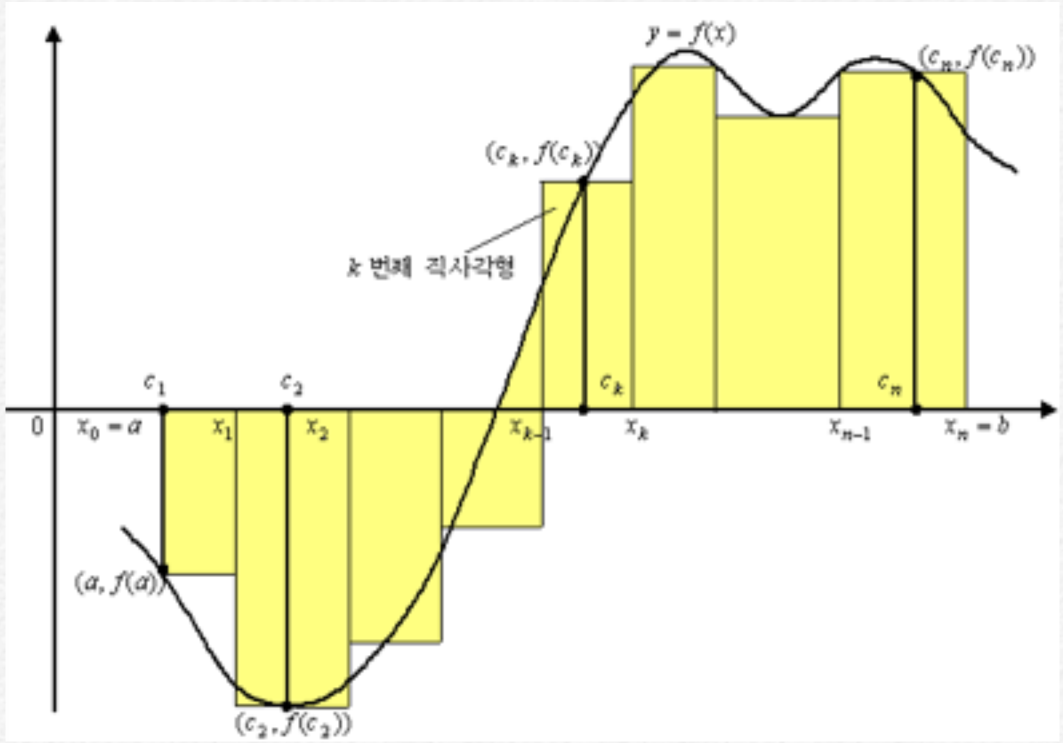
정적분은(면적) 부정 적분(역-미분 함수)과는 다른 접근 방법이다. 그러나 이 두 개념은 17세기 경에 Newton-Leibniz에 의해 서로 연결되었고 이를 적분(integral)이라 하였다.



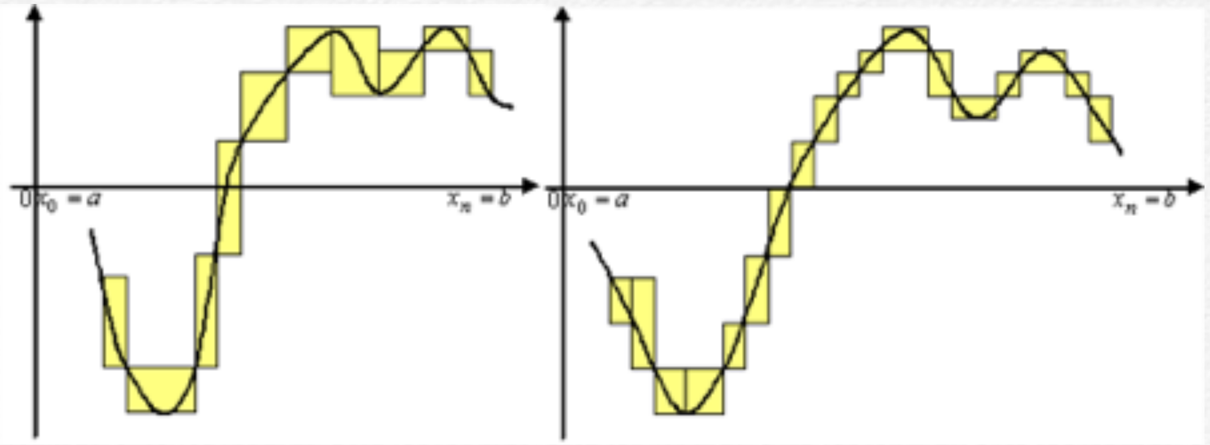
함수 $f(x) = x^2$의 (0, 2) 구간 아래 면적은 어떻게 구할까? 구간 (0, 2)를 여러 구간으로 나눈 후 얻은 직사각형의 면적의 합을 함수의 면적으로 생각할 수 있다. 이를 정적분이라 한다. 위의 그림에서 정적분(실제 면적)은 왼쪽보다는 크고 오른쪽 보다는 적을 것이다.

Riemann 적분

$$S_k = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$$



구간을 더 좁게 나눌수록 실제 면적과 Riemann적분의 차이는 줄어든다. 나눈 구간의 넓이가 매우 좁아지면(우측 그래프) Riemann 면적과 실제 함수의 면적은 같아질 것이다.



정적분 규칙

1) $\int_a^a f(x)dx = 0$: 한 점에서 정적분 값은 0 <=> 연속확률변수의 한 값의 확률은 0이다

2) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$: 적분 구간 순서를 바꾸면 음이 붙는다.

3) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$ 4) $\int_b^a (f(x) \pm g(x))dx = \int_b^a f(x)dx \pm \int_b^a g(x)dx$

5) $\int_b^a f(x)dx \geq \int_b^a f(x)dx$ if $f(x) \geq g(x)$ in (a,b) - dominant rule

6) $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ if $f(x) \geq 0$ in (a,b) - 통계학의 모든 확률분포함수는 0보다 크다. 확률의 공리

7) $\int_b^a f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx,$ if $a \leq b \leq c$

8) $\int_a^b kdx = k(b-a)$

정적분과 부정적분 관계

Newton-Leibniz은 $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ 임을 보였다.

정적분 $\int_a^b f(x)dx$ 구할 때 다음 절차를 따른다.

1) 적분 구간 (a, b)를 $f(x)$가 양과 음인 구간으로 나뉜다.

2)함수 $f(x)$의 부정적분 $F(x)$을 구한다.

3)각 서브구간에서 $F(b) - F(a)$ 식에 의해 정적분을 구한다.

4)정적분값이 음인 경우에는 +로 바꾸어 서브구간의 면적을 합친다.

*) 통계학 확률밀도함수는 항상 양이므로 음인 구간이 없어 그냥 정적분을 구하면 된다.

함수 $f(x) = x^3 - 4x, -2 \leq x \leq 2$ 정적분을 구하시오. 면적 $A_1 + A_2$

$$A_1 = \int_{-2}^{0} (x^3 - 4x)dx$$

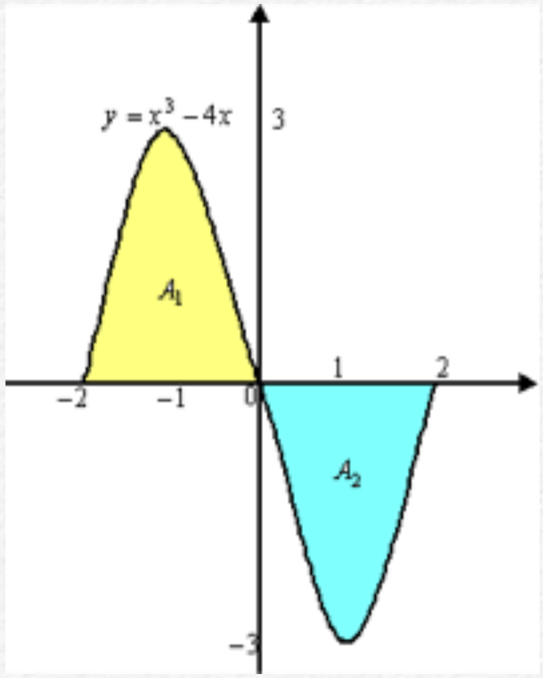
$$A_2 = \int_{0}^{2} (x^3 - 4x)dx$$

부정적분 $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$

$A_1 = F(0) - F(-2) = 0 - (-4) = 4$

$A_2 = F(2) - F(0) = (-4) - 0 = -4$

그러므로 4+4=8, 정적분 값이다.




```
fx=function(x){x^3-4*x} #define function
integrate(fx,-2,0) #Riemann Integral
integrate(fx,0,2)
```

```
> fx=function(x){x^3-4*x} #define function
> integrate(fx,-2,0) #Riemann Integral
4 with absolute error < 4.4e-14
> integrate(fx,0,2)
-4 with absolute error < 4.4e-14
```

만약 구간이 ∞이면 숫자 대신 “inf” 넣으면 된다.

```
fx2=function(x){exp(-x)}
integrate(fx2,0,Inf)
```

```
> integrate(fx2,0,Inf)
1 with absolute error < 5.7e-05
```

연습문제

(1) $\int_0^1 (1 + x^2)dx$ (2) $\int_0^2 (4 - x^3)dx$

(3) $\int_0^1 (x^2 + \sqrt{x})dx$ (4) $\int_1^{32} x^{-5/6}dx$

치환적분 Integral by Substitution

개념

미분의 연쇄법칙(chain rule, Inside-Outside)의 역개념

$[f(x)^n]' = n(f(x))^{n-1}f'(x)$ - 바깥 미분 후 안쪽 함수 미분

함수 $\sqrt{2x^2 - 1}$를 미분하자.

$$(\sqrt{2x^2 - 1})' = \frac{1}{2}(2x^2 - 1)^{-1/2}(4x) = 2x(2x^2 - 1)^{-1/2} = 2x\frac{1}{\sqrt{2x^2 - 1}}$$

법칙

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + c$$

Let $u = g(x)$. 양변을 미분하면 $du = g'(x)dx$이므로

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du = F(u) + c$$

예제

$\int \sqrt{1-x^2}\cdot 2x dx$ 구하시오.

치환적분 방법

Let $u = 1-x^2$. $du = -2xdx$이므로

$$\int \sqrt{1-x^2}\cdot 2xdx = \int -\sqrt{u}du = -\frac{2}{3}\mu^{3/2}+c = -\frac{2}{3}(1+x^2)^{3/2}+c$$

직감적 방법

지수(제곱근) 안의 함수(1)의 미분이 밖의 함수(2)의 형태를 만들 수 있다면...

(1) 지수 형태의 함수, $\sqrt{1-x^2}$에 (승수+1)의 함수 $(1-x^2)^{3/2}$를 기본으로 연쇄 법칙으로 미분하자.

(2) $[(1-x^2)^{3/2}]' = \frac{3}{2}(1-x^2)^{1/2}(-2x)$, 적분함수와 비교하여 상수를 조정한다. 차이가 있다면 상수 $-3/2$이 없어야 하므로 $(1-x^2)^{3/2}$에 $-2/3$를 곱하면 최종 부정적분을 얻을 수 있다.

$$\underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{(1)}\cdot\underbrace{2x}_{(2)}$$

$$(1-x^2)^{\frac{1}{2}+1} = (1-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big]'$$

$$= \frac{3}{2}\cdot(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\boxed{-}2x \Rightarrow -\frac{2}{3}\sqrt{1-x^2}$$

연습문제

(1) $\int_0^2 28(7x-2)^3dx$ (2) $\int_0^1 \frac{1}{(1-x)^2}dx$

(3) $\int_0^1 8x(x^2-1)^{1/3}dx$ (4) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{5x}}$

(1) $\int_0^1 x^3(1+x^4)^3dx$ (2) $\int_0^1 y\sqrt{1-y^2}dy$

(3) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{4x}{\sqrt{x^2+1}}dx$ (4) $\int_1^4 \frac{dy}{2\sqrt{y}(1+\sqrt{y})^2}$

(5) $\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^2}dx$ (6) $\int_0^1 \sqrt{s^5+2s}(5s^4+2)ds$

(7) $\int_0^1 e^{x^2}xdx =$ (8) $\int_1^2 \frac{2^{\ln x}}{x}dx$

(a) 함수 $f(x)$ 가 연속일 때 $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 f(1-x)dx$ 임을 보이시오.

(b) 만약 $\int_0^1 f(x)dx = 3$ 일 때 다음의 경우 $\int_{-1}^0 f(x)dx$ 을 구하시오.

1) $f(x)$ 가 우함수 (even function) 2) $f(x)$가 기함수 (odd function)

(c) $\int_0^\infty f(x)dx = 1$일 때 다음의 경우 $\int_\infty^{-\infty} f(x)dx$을 구하시오.

1) $f(x)$ 가 우함수 (even function) 2) $f(x)$가 기함수 (odd function)

부분적분 Intergral by Parts

개념

x의 함수 u, v에 대하여 다음이 성립 - $d(uv) = udv + vdu$ 양변을 적분하면

$$\int d(uv) = \int udv + \int vdu \Rightarrow \int udv = \int d(uv) - \int vdu = uv - \int vdu$$

(곱의 함수)를 (u)*(dv) 파트로 나눔 - 좌종적으로는 u는 미분, dv는 적분해야 하므로 dv는 적분이 용이하거나 함수의 형태가 유지되는 것을 사용하는 것이 적절함, (통계학에서는) e^x를 적분하면 그 형태를 가지므로 주로 dv 사용

(언제 사용) 치환적분처럼 두 함수의 곱으로 되어 있으나 한 함수가 다른 함수의 미분으로 되지 않는 경우 사용

예제 $\int_0^1 xe^x dx =$

$\underline{x}\ \underline{e^x}$

미분?

can't make

$dv = e^x dx$

$-v = \int e^x dx = x$

$u = x$

$-du = dx$

$\int_0^1 xe^x dx = xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx$

$= xe^x]_0^1 - e^x]_0^1$

$= (1-0)-(e-1) = \underline{2-e}$

예제2 $\int_1^2 \ln(x)dx$

$\ln(x)$를 적분? 불가능, 미분은 가능하므로 $u = \ln x$, 그러면 당연히 $dv = dx$

그러므로 $du = \frac{1}{x}dx, v = x$이다.

$$\int udv = uv - \int vdu \Rightarrow \int_2^1 \ln(x)dx = x\ln(x)]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{x}xdx$$

$$= (2\ln(2) - \ln(1)) - (2-1) = 0.38$$

예제3 $\int_0^1 x^2e^x dx =$

$u = x^2,\ dv = e^x dx$ ===> $du = 2x(dx),\ v = e^x$

그러므로 $\int_0^1 x^2e^x dx = x^2e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x 2xdx$ (마지막 항은 다시 한 번 부분적분 필요함) $u = 2x,\ dv = e^x dx$ ===> $du = 2(dx),\ v = e^x$

$$\int_0^1 x^2e^x dx = x^2e^x]_0^1 - (\int_0^1 e^x 2xdx = 2xe^x]_0^1 - \int_0^1 2e^x dx)$$

$$= x^2e^x - 2xe^x + 2e^x]_0^1 = e - 2 = 0.7183$$

표적분 table integral

부분적분을 용이하게 한다. 미분함수 f(x)는 미분하면서 차수가 용이해야 하고, 적분 함수 g(x)는 용이하게 적분 할 수 있어야 한다.

미분 f(x) -(1)	적분 g(x)
f'(x) ---(2)	∫g(x)---(a)
f"(x) ---(3)	∬g(x)---(b)
0이 될 때까지---(3)	∭g(x)---(c)

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = (1)*(a) - (2)*(b) + (3)*(c) - \ldots]_a^b$$ ---(a)

예제 $\int_0^1 x^2 e^x dx =$

미분 f(x)=x^2	적분 g(x)=e^x
f'(x)=2x	e^x
f"(x)=2	e^x
f'"(x)=0	e^x

$\int_0^1 x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x\Big]_0^1 = e - 2$ (부분적분과 동일)

미분이 0까지 가지 못해 중간에 멈춘다면..

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = (1)*(a)]_a^b - \int_a^b (2)*(a)dx$$

예제 $\int_1^2 \ln(x)dx$

$\ln(x)$ 미분이 용이하므로

미분 f(x)=ln(x)	적분 g(x)=1
f'(x)=1/x	x

$$\int_1^2 \ln(x)dx = x \cdot \ln(x)]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{x} x dx = 2\ln(2) - \ln(1) - (2-1)$$

연습문제

(1) $\int_1^2 x^2 \ln(x)dx$

(2)감마함수 : $\Gamma(Z) = \int_0^\infty x^{z-1}e^{-x}dx$ 이다.

- $\Gamma(1) = 0$ 임을 보이시오
- n이 양의 정수일 경우 $\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1)$ 임을 보이시오.
- n이 양의 정수일 경우 $\Gamma(n) = (n-1)!$ 임을 보이시오.

(3)함수 $f(x) = \frac{1}{k}x^2 e^{-x/2},\ 0 < x$ 가 확률분포함수가 되기 위한 상수 k는?