R.V. & PDF

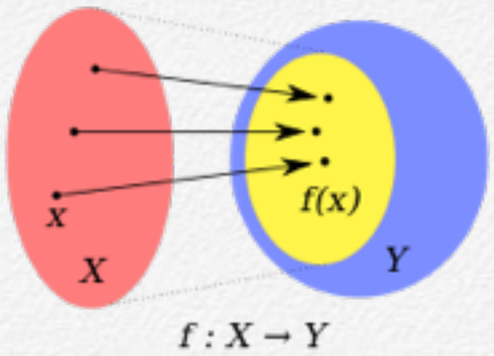
함수 Function

정의

두 집합 X, Y 사이의 대응관계로 집합 X의 모든 원소들을 각각 집합 Y의 유일한 원소에 일대일 대응시키는 관계

기호 : $y = f(x)$, $f(x)$, : y는 x의 함수

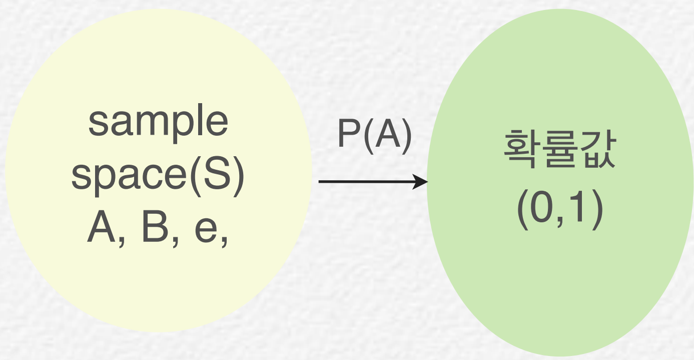
집합 X는 함수 f의 정의역(domain), 집합 Y는 함수 f의 공역(range)



확률집합함수 probability set function

개념 y=f(x)

- y=확률, x=집합
- 집합의 정의, 집합에 대한 확률값 정의



표본공간과 집합

- 확률실험 random experiment : 실험 결과를 알 수 없다.
  - 주사위 결과, 학생들의 장래 직업, 학생들의 일주일 공부시간
- 표본공간 sample space : 확률실험 모든 결과의 모임
  - {1, 2, 3, 4, 5, 6}, {공무원, 교사, 전문직, ...}, {0~40시간}
  - 원소 element : 확률실험의 각 결과 {e_1, e_2, ...}
- 집합 : 관심 원소들의 모임 A, B,
  - A={짝수}={2,4,6}, B={10시간 미만}= {<10}

σ-필드

표본공간 S, 표본공간의 모든 부분집합의 모임을 $\mathcal{B}$라 하자. 다음 조건을 만족하는 $\mathcal{B}$를 Borel σ-필드라 한다.

(1) $\phi \subseteq B$ (2) 만약 $C \subseteq B$이면, $\phi \subseteq S$ (3) 만약 $C_i \subseteq B$이면, $\underset{i=1}{\cup}\, C_i \subseteq B$

- 집합에 대한 정의, 즉 함수에서 X에 대한 정의임

확률집합함수 Probability Set Function

S=표본공간, 집합 C는 Borel σ-필드 $\mathcal{B}$의 부분집합일 경우 다음 함수 P를 확률집합함수라 한다.

1) P(C)≥0

2) P(S)=1

3) $P(\underset{i=1}{\cup} C_i) = \sum_{i=1} P(C_i)$, C_i들은 disjoint 집합

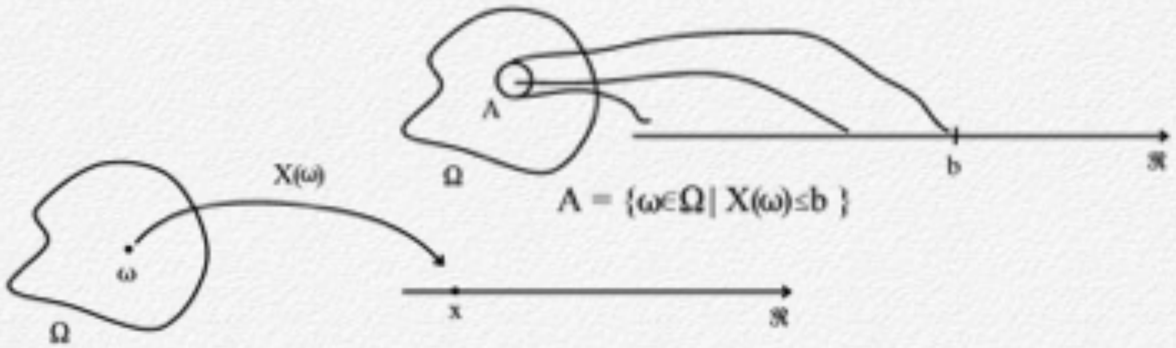
확률

정의 : 확률은 관심 사건이 일어날 가능성 (chance or likelihood)을 숫자로 표현한 것

확률의 0 (일어날 가능성 없음)과 1(항상 일어남) 사이의 값(0% TO 100%)

Random Variable 확률변수

- 확률실험 표본공간 S가 정의역(X 범위), 실수(real number)가 공역(Y 범위)인 측정 measure 함수
- 확률실험의 각 결과에 실수 값을 할당하는 규칙 (함수)
- (기호) 알파벳 : X, Y, Z
- $x = X(s), x = X(e), e \subseteq S$



- 확률변수=데이터 값과 같다.
- X=일주일 공부시간인 경우 => $x_1 = 2.5, x_2 = 10.3, x_3 = 25.0, \ldots$
- X=주사위 눈금 => $x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = 4, \ldots$

확률변수 종류

이산형 discrete

확률변수 X의 정의역 원소가 유한이거나 셀수 있는 경우

(예) 2개 주사위 눈금 합, 대전시 한 달 교통사고 건수

연속형 continuous

X의 정의역 원소가 무한인 경우

(예) 대전시 기업 종사자 일년 연봉, 대전 월 강수량, 학생 공부시간

확률밀도함수 probability density/mass function, 확률분포 distribution 함수

정의

확률변수의 값이 정의역, 각 값에 대응하는 확률 값을 공역으로 하는 규칙

규칙은 함수, 표, 그래프임

(기호) $P(X=x) = P(x) = P_X(x)$, $f(x)$ -연속형, $p(x)$ -이산형

확률 정의

상대빈도 relative frequency

동전을 던지는 경우 {앞 면이 나올 사건}에 관심이 있어 실험을 한다고 하자. 10번을 던지니 6번이 앞 면이었다면 상대빈도는 0.6이다. 계속 100번 던지니 52번이 앞 면이 나왔다면 상대 빈도는 0.52이다. 1000번을 던지니 515번이 앞면이었다면 상대 빈도는 0.515이다.

$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{f}{n}$, 관심사건 A 확률, n=실험 횟수, f=사건 A가 발생한 횟수

동전 던지기 역사

Count Buffon (1707-1788): 4040번 동전 던지기 실험 앞면 2048회, P(앞면)= 0.5069

Karl Pearson (1900): 24, 000 던지기 앞면 12,012, P(앞면)=0.5005

John Kerrich : 10,000 던지기, 앞면 5067 heads, P(앞면)=0.5067.

많은 시행 후에는 관심 사건의 나타날 가능성을 예상할 수 있다. 즉, 확률은 무한 실험 후에 일어난 사건으로 계산됨

Laplace 확률 : 고전적 정의

표본공간의 각 원소들이 일어날 가능성이 같다고(equally likely) 가정하여 확률을 정의하는 것을 Laplace 확률(고전적 정의)이라 한다.

고전적 정의의 가정은 각 원소(주사위 눈금)가 나타날 확률과 동일(1/6)하다는 것이다. 주사위를 던지는 실험에서 짝수가 나올 확률은 3/6=1/2으로 정의한다. 표본공간의 원소 개수는 6개이고 짝수 사건의 원소는 3개이므로 짝수가 발생할 확률은 0.5이다.

일반적으로 Laplace 확률 정의는 표본공간의 개수가 유한이고 원소 모두를 알고 있을 때 사용하는데 대부분 이 정의에 의해 확률 모형이 정의된다.

확률변수에서의 확률

(이산형) 확률변수의 정의되는 개별 값에서 확률값이 정의된다. 가질 수 있는 값이 유한하므로 확률 계산이 가능하다.

- 주사위 눈금 : $P(X = 1) = 1/6$

(연속형) 면적으로 계산, 그러므로 임의의 한 점에서 확률값은 0임. 확률밀도함수는 함수의 식을 얻는 것이 불가능하다. 이론적 고찰에 의해 “정규분포 확률밀도함수”가 구해졌다.

확률의 공리 Axiom

1) 확률변수 X가 값 x일 확률($P(X = x)$)은 0보다 크다. $p(x) > 0, f(x) > 0$

2) 표본공간의 확률 합은 1이다. $\sum_x P(x) = 1, \int f(x)dx = 1$

누적 PDF Cumulative PDF 분포함수

정의

확률변수X에 대하여 임의의 값 x까지 확률을 누적한 함수를 누적확률분포함수라 한다.

(기호) $F(x) = P(X \le x)$

(이산형) $p(x) = F(x) - F(x-)$ (연속형) $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$

성질

1) 비감소 함수 non-decreasing => 만약 $x_1 < x_1$이면 $F(x_1) \le F(x_2)$이다.

2) $F(-\infty) = 0, F(\infty) = 1$

기대값 expected value

정의

- 확률변수의 결과 값이 무한히 실현되었을 때 나타나는 기대되는 값
- 계산) 확률변수의 각 값에 확률을 곱한 값
- $E(X) = \sum_x xp(x) = \int xf(x)dx$

활용

- (주사위 눈금의 기대값) 3.5
- (데이터) $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$의 평균 $\sum_x xp(x) = \sum_i x_i p(x_i) = \sum_i x_i \frac{1}{n} = \bar{x}$
- 모집단 데이터 : $E(X) = \mu$, 표본 데이터 : $E(X) = \bar{x}$

분산

- $(x - E(X))^2$의 기대값이 분산 : $V(X) = E(X - E(X))^2$
- (간편식) $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$
- 모집단 데이터 : $V(X) = \sigma^2$, 표본 데이터 : $V(X) = s^2$

연습문제 1 *)이하 모든 연습문제는 Hogg And Craig 수리통계 문제임

주사위 2개를 던져 눈금의 합에 관심을 갖는 경우,

(1) 확률변수 정의하시오.

- X=주사위 눈금의 합, $X = 2, 3, \ldots, 12$

(2) 확률밀도함수를 구하시오.

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$px(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

(공리) (1) 모든 확률은 0보다 크다. (2) 확률의 합은 1이다.

(3) 기대값과 분산을 구하시오.

$$E(X) = \sum_x xp(x) = 2 * \frac{1}{36} + 3 * \frac{2}{36} + \ldots + 12 * \frac{1}{36} = 7$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \sum_x x^2 p(x) - 7^2 = 5.83$$

```
x=seq(2,12)
px=c(1/36,2/36,3/36,4/36,5/36,6/36,5/36,4/36,3/36,2/36,1/36)
sum(px)
ex=sum(x*px);ex
sum(x^2*px)-ex^2
```

```
xp=function(x){x*2*(1-x)}
x2p=function(x){x^2*2*(1-x)}
integrate(xp,0,1)
integrate(x2p,0,1)
```

```
> ex=integrate(xp,0,1);ex
0.3333333 with absolute error < 3.7e-15
```

```
ex=integrate(xp,0,1) #ex = "0.3333333 with absolute error < 3.7e-15"
ex2=integrate(x2p,0,1) #ex2 = "0.1666667 with absolute error < 1.9e-15"
6*as.numeric(ex[1])+3*as.numeric(ex2[1]) #E(6X+3X^2)
as.numeric(ex2[1])-as.numeric(ex[1])^2 #variance
```

Example 1.8.4. Let X have the pdf

$$f(x) = \begin{cases} 2(1-x) & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{elsewhere.} \end{cases}$$

Then

$$\begin{aligned} E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx &= \int_0^1 (x)2(1-x)\,dx = \frac{1}{3}, \\ E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx &= \int_0^1 (x^2)2(1-x)\,dx = \frac{1}{6}, \end{aligned}$$

and, of course,

$$E(6X + 3X^2) = 6\left(\frac{1}{3}\right) + 3\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{5}{2}. \quad \blacksquare$$

연습문제 2

다음은 누적 확률밀도함수이다.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x/2 & 0 \le x < 1 \\ 1 & 1 \le x. \end{cases}$$

(1) $P(-1 < X < 1/2)$

(2) $P(X = 1)$

연습문제 3

다음은 확률밀도함수이다. 상수 c를 구하시오.

$$p_X(x) = \begin{cases} cx & x = 1, 2, \ldots, 10 \\ 0 & \text{elsewhere,} \end{cases}$$

연습문제 4

다음은 확률밀도함수이다. 상수 c를 구하시오.

$$f_X(x) = \begin{cases} cx^3 & 0 < x < 2 \\ 0 & \text{elsewhere,} \end{cases}$$

1.5.8. Given the cdf

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ \frac{x+2}{4} & -1 \le x < 1 \\ 1 & 1 \le x, \end{cases}$$

sketch the graph of $F(x)$ and then compute: (a) $P(-\frac{1}{2} < X \le \frac{1}{2})$; (b) $P(X = 0)$; (c) $P(X = 1)$; (d) $P(2 < X \le 3)$.

1.7.7. Let $f(x) = 1/x^2$, $1 < x < \infty$, zero elsewhere, be the pdf of X. If $C_1 = \{x : 1 < x < 2\}$ and $C_2 = \{x : 4 < x < 5\}$, find $P_X(C_1 \cup C_2)$ and $P_X(C_1 \cap C_2)$.

1.7.9. A **median** of a distribution of one random variable X of the discrete or continuous type is a value of x such that $P(X < x) \le \frac{1}{2}$ and $P(X \le x) \ge \frac{1}{2}$. If there is only one such x, it is called the *median of the distribution*. Find the median of each of the following distributions:

(a) $p(x) = \frac{4!}{x!(4-x)!}(\frac{1}{4})^x(\frac{3}{4})^{4-x}$, $x = 0, 1, 2, 3, 4$, zero elsewhere.

(b) $f(x) = 3x^2$, $0 < x < 1$, zero elsewhere.

(c) $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$, $-\infty < x < \infty$.

1.7.10. Let $0 < p < 1$. A $(100p)$th **percentile** (**quantile** of order p) of the distribution of a random variable X is a value ξ_p such that $P(X < \xi_p) \le p$ and $P(X \le \xi_p) \ge p$. Find the 20th percentile of the distribution that has pdf $f(x) = 4x^3$, $0 < x < 1$, zero elsewhere.

1.9.1. Find the mean and variance, if they exist, of each tions.

(a) $p(x) = \frac{3!}{x!(3-x)!}(\frac{1}{2})^3$, $x = 0, 1, 2, 3$, zero elsewhere.

(b) $f(x) = 6x(1-x)$, $0 < x < 1$, zero elsewhere.

(c) $f(x) = 2/x^3$, $1 < x < \infty$, zero elsewhere.

1.9.2. Let $p(x) = (\frac{1}{2})^x$, $x = 1, 2, 3, \ldots$, zero elsewhere, be the pmf of the random variable X. Find the mgf, the mean, and the variance of X.

1.9.8. Let X be a random variable such that $E[(X-b)^2]$ exists for all real b. Show that $E[(X-b)^2]$ is a minimum when $b = E(X)$.

1.9.9. Let X be a random variable of the continuous type that has pdf $f(x)$. If m is the unique median of the distribution of X and b is a real constant, show that

$$E(|X-b|) = E(|X-m|) + 2\int_m^b (b-x)f(x)\,dx,$$

provided that the expectations exist. For what value of b is $E(|X-b|)$ a minimum?

유명한 이산형 확률분포

베르누이 Bernoulli 분포 X~B(p)

베르누이 시행

1) 확률실험의 결과는 이진형(binary) : 성공/실패

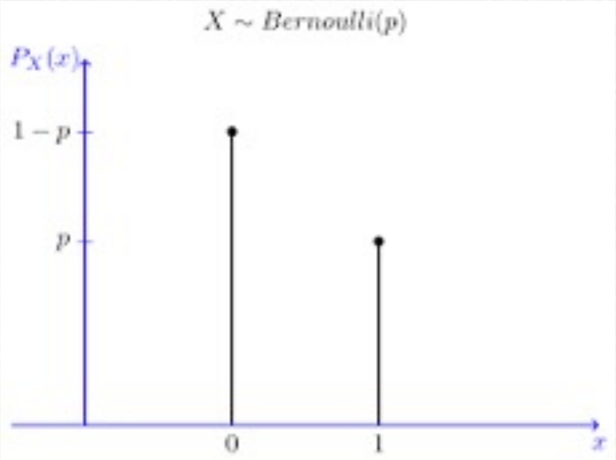
2)성공 확률은 p로 매번 일정하다.

3)모든 실험은 서로 독립이다. 각 실험의 결과는 다른 실험 결과에 영향을 미치지 않는다

베르누이 확률변수

- (정의) X = 베르누이 실행 결과
- (X의 범위) X=0, 1(sucess)
- 확률분포함수 $p(x) = p^x(1-p)^{1-x},\ x = 0, 1$

- 평균 $E(X) = p$ 분산 $V(X) = p(1-p)$



모든 그림 출처 : 인터텟 이미지 사용

p=모수(parameter), 확률변수 형태 결정하므로 확률계산 가능

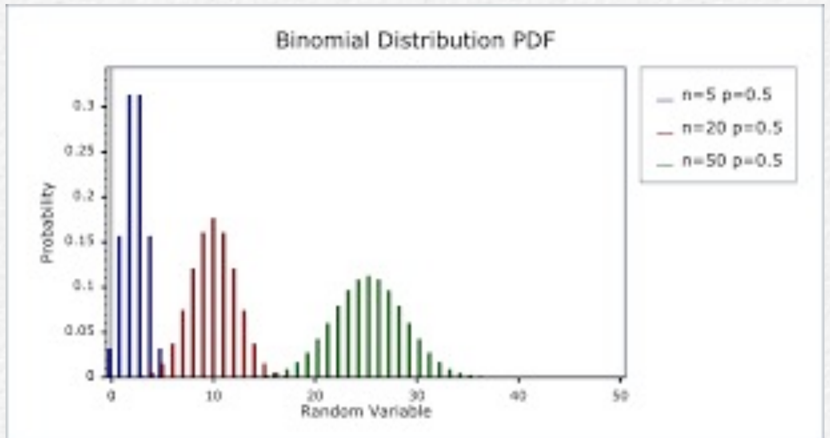
이항 Binomial 분포 X~B(n,p)

(정의) X = n번의 베르누이 시행 결과 성공의 회수

(X의 범위) $X = 0, 1, 2, \ldots, n$

(확률밀도함수) $p(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x},\ x = 0, 1, 2, \ldots, n$

(평균) $E(X) = np$ (분산) $V(X) = np(1-p)$



기하 Geometric 분포 X~G(p)

(정의1) X = 1번 성공까지 시행한 베르누이 회수

(정의2) X = 베르누이 시행에서 1번 실패까지 성공 회수 *)NB

(X의 범위1) $X = 1, 2, 3, \ldots$

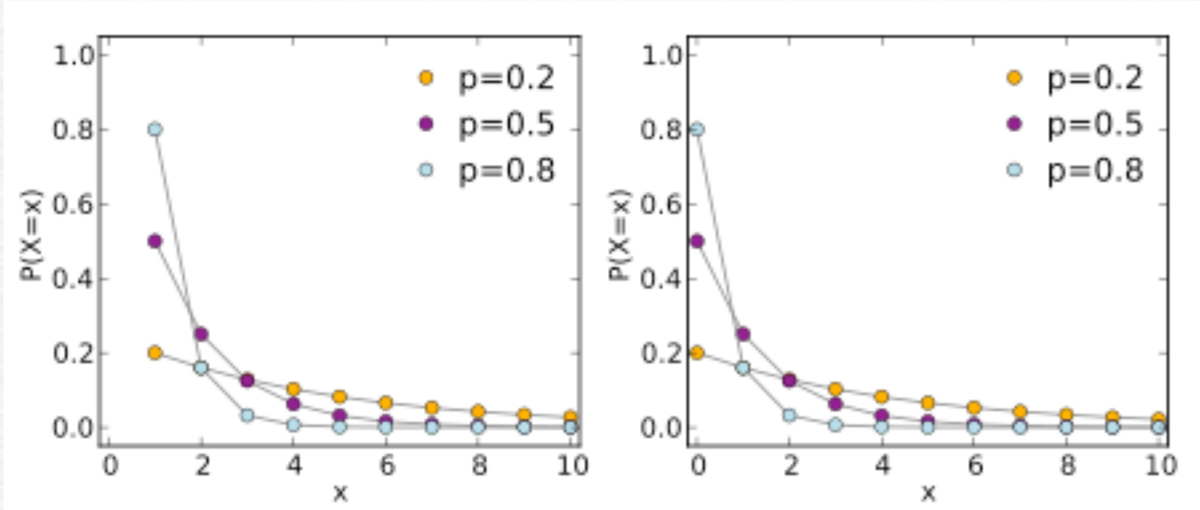
(X의 범위2) $X = 0, 1, 2, \ldots$

(확률밀도함수1) $p(x) = p(1-p)^{x-1},\ x = 1, 2, 3, \ldots$

(확률밀도함수2) $p(x) = p^x(1-p),\ x = 0, 1, 2, \ldots$

(평균1) $E(X) = 1/p$ (분산1) $V(X) = (1-p)/p^2$

(평균2) $E(X) = p/(1-p)$ (분산2) $V(X) = p/(1-p)^2$



$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(Y) &= \sum_{k=0}^{\infty}(1-p)^k p \cdot k \\
&= p\sum_{k=0}^{\infty}(1-p)^k k \\
&= p(1-p)\sum_{k=0}^{\infty}(1-p)^{k-1} \cdot k
\end{aligned}
$$

$$= p(1-p)\left[\frac{d}{dp}\left(-\sum_{k=0}^{\infty}(1-p)^k\right)\right]$$
$$= p(1-p)\frac{d}{dp}\left(-\frac{1}{p}\right) = \frac{1-p}{p}.$$

출처 : 위키피디어

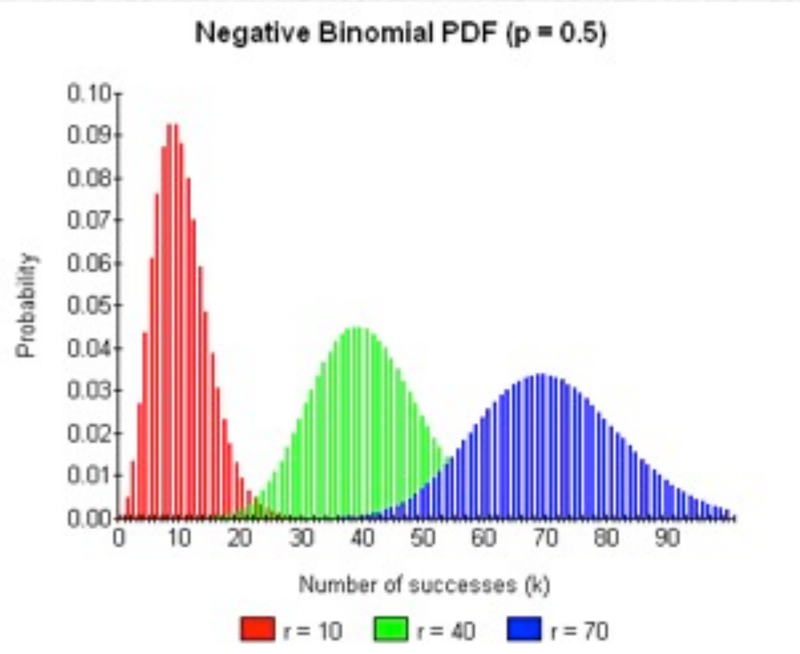
음이항 Negative Binomial 분포 X~NB(r,p)

(정의) X = 베르누이 시행에서 r번 실패까지 성공 횟수

(X의 범위) $X = 0, 1, 2, ...$

(확률밀도함수) $p(x) = \binom{x+r-1}{x} p^x (1-p)^r,\ x = 0, 1, 2, ...$

(평균) $E(X) = pr/(1-p)$ (분산) $V(X) = pr/(1-p)^2$



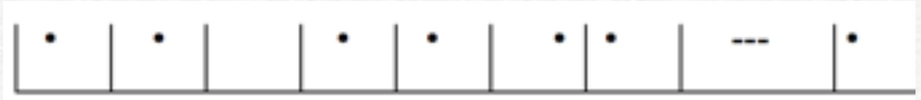
포아송 Poisson 분포 X~Poi(λ)

예제

- 단위 시간, 면적에서 임의의 사건 성공 회수에 관심을 갖는 경우
- 한남대 앞 정류장에 도착하는 버스 수(시간 당), 한 페이지 당 오타 숫자, 은행 창구를 찾는 고객 수(1일) 등이 예이다.

포아송 프로세스

- 시간이나 면적을 각 구간에서는 많아야 하나의 사건이 있어 나도록 동일 크기의 구간으로 나누자. (이항분포 X~(n, p))



- 각 구간에서 2개 이상 사건이 일어날 가능성은 0이며
- 각 구간의 사건 발생은 독립적이고 사건 발생 확률은 동일하고
- 구간의 사건 발생확률은 구간의 크기에 비례한다.

(정의) X= 구간에서 관심사건의 발생 회수

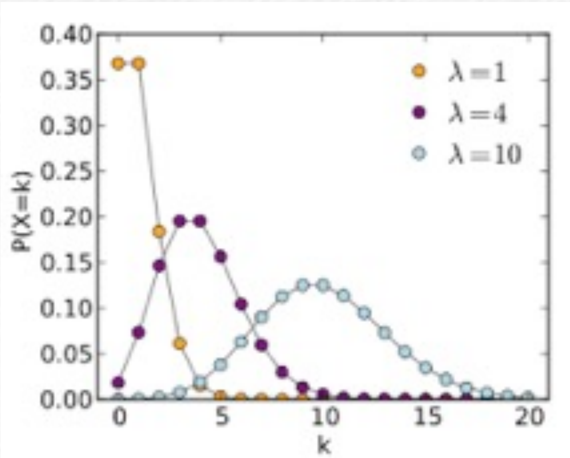
(X의 범위) $X = 0, 1, 2, ...$

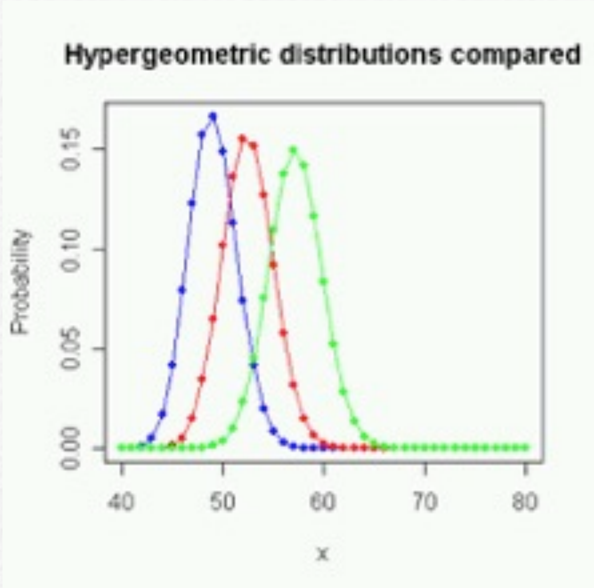
(확률밀도함수) $np = \lambda$가 되도록 n이 충분히 크고 발생확률 p가 매우 낮음

$$\lim_{n\to\infty}\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x} = \lim_{n\to\infty}\binom{n}{x}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^x\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$
$$= \frac{\lambda^x}{x!}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \frac{n(n-1)...(n-x+1)}{n^x}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-x}$$
$$= \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}$$

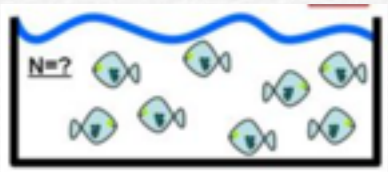
(확률밀도함수) $p(x) = \dfrac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda x},\ x = 0, 1, 2, \ldots$

(평균) $E(X) = \lambda$ (분산) $V(X) = \lambda$

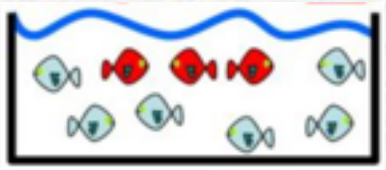




초기하분포 X~HG(N,K,n)



호수에 물고기가 몇 마리(N) 있을까?



색이 다른 물고기를 K 마리를 넣는다.

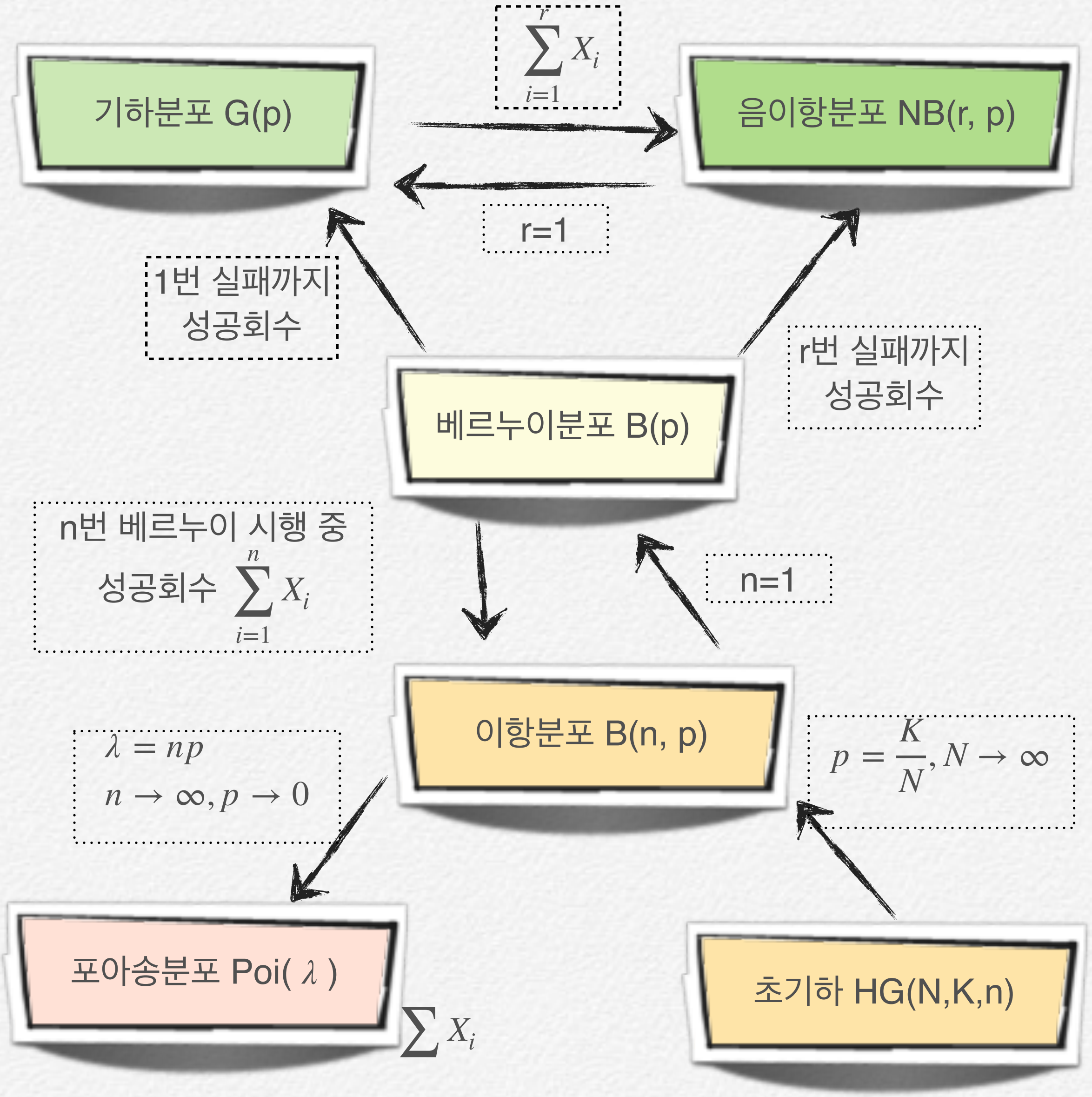
일정 시간이 지난 후 n마리 물고기를 잡는 실험에서

(정의) X = 색이 다른 물고기 수

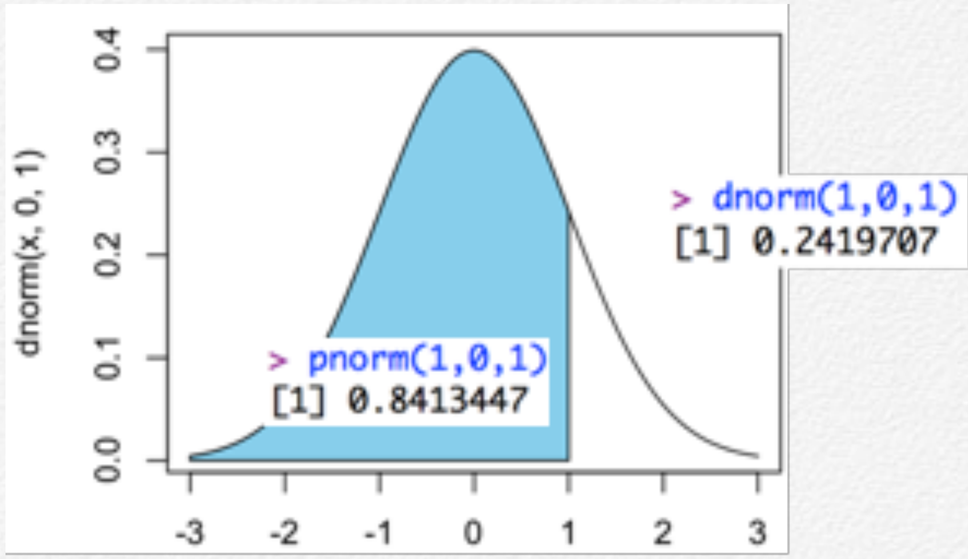
(X의 범위) $X = 0, 1, 2, \ldots, \min(K, n)$

(확률밀도함수) $p(x) = \dfrac{\binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x}}{\binom{N+K}{n}},\ x = 0, 1, 2, \ldots, \min(K, n)$

(평균) $E(X) = n\dfrac{K}{N}$ (분산) $V(X) = n\dfrac{K}{N}\dfrac{N-K}{N}\dfrac{N-n}{N-1}$



IN R




```
> qnorm(0.84,0,1)
[1] 0.9944579
```

함수	기능
d*(x, 모수)	확률밀도함수 확률 값, f(x)
p*(x, p, 모수)	분포함수 값, F(x)
q*(p, 모수)	역분포함수 값, $F^{-1}(p)$
r*(n, 모수)	분포함수 따르는 데이터 n개 랜덤하게 생성

이항분포 *binom(시험회수,p)

포아송분포 *pois(λ)

음이항분포 *nbinom(size=성공회수,x=실패수, p)

초기하분포 hyper(관심개수M,N-M,표본개수)

연습문제 : (이산형)

3.1.4. Let the independent random variables X_1, X_2, X_3 have the same pdf $f(x) = 3x^2$, $0 < x < 1$, zero elsewhere. Find the probability that exactly two of these three variables exceed $\frac{1}{2}$.

3.1.23. Let X have a geometric distribution. Show that

$$P(X \geq k + j \mid X \geq k) = P(X \geq j), \tag{3.1.9}$$

where k and j are nonnegative integers. Note that we sometimes say in this situation that X is *memoryless*.

3.1.5. Let Y be the number of successes in n independent repetitions of a random experiment having the probability of success $p = \frac{2}{3}$. If $n = 3$, compute $P(2 \leq Y)$; if $n = 5$, compute $P(3 \leq Y)$.

3.1.6. Let Y be the number of successes throughout n independent repetitions of a random experiment with probability of success $p = \frac{1}{4}$. Determine the smallest value of n so that $P(1 \leq Y) \geq 0.70$.

3.2.8. Let the number of chocolate chips in a certain type of cookie have a Poisson distribution. We want the probability that a cookie of this type contains at least two chocolate chips to be greater than 0.99. Find the smallest value of the mean that the distribution can take.

3.2.11. Let X have a Poisson distribution. If $P(X = 1) = P(X = 3)$, find the mode of the distribution.

3.2.12. Let X have a Poisson distribution with mean 1. Compute, if it exists, the expected value $E(X!)$.

3.1.27. Consider a shipment of 1000 items into a factory. Suppose the factory can tolerate about 5% defective items. Let X be the number of defective items in a sample without replacement of size $n = 10$. Suppose the factory returns the shipment if $X \geq 2$.

(a) Obtain the probability that the factory returns a shipment of items which has 5% defective items.

(b) Suppose the shipment has 10% defective items. Obtain the probability that the factory returns such a shipment.

(c) Obtain approximations to the probabilities in parts (a) and (b) using appropriate binomial distributions.

헌혈 지원자의 80%는 헌혈 가능자라 하자.

(1)5명을 임의 추출했을 때 적어도 한 명이 헌혈 가능한 사람일 확률을 계산하시오.

(2)많아야 4명이 한혈 가능한 사람일 확률을 구하시오.

은행에 고객이 임의의 1초에 창구를 찾을 확률은 0.1이고 고객이 창구를 찾는 사건은 서로 독립이라고 가정하자.

①3초에 첫 손님이 올 확률을 계산하시오.

②적어도 3초 안에는 첫 손님이 오지 않을 확률을 계산하시오.

③첫 손님이 오려면 몇 초나 기다려야 할까?

지질학 연구 결과 석유 탐사 중 석유 발견 확률은 0.2이다.

①3번째 탐사에서 처음 석유가 발견될 확률을 계산하시오.

②7번째 탐사에서 3번째 석유가 발견될 확률을 계산하시오.

③석유가 3개 발견될 때까지 시추를 계속하기로 하였다. 몇 번 정도 시추해야 하나?

제품의 10%는 불량이다. 제품을 하나씩 검사하는 과정에서

(1) 첫 불량품이 2번째 검사에서 발견될 확률을 계산하시오.

(2) 5번째 시행에서 세 번째 불량 제품이 발견될 확률을 계산하시오.

(3) 5번째 시행 혹은 그 전 시행에서 세 번째 불량 제품이 발견될 확률을 계산하시오.

사과 한 상자에 20개가 들어 있다. 5개를 임의로 골라 상태를 보고 불량 사과가 없으면 구입 한다. 만약 4개의 불량 사과가 있는 상자를 골라 검사할 때

(1)사과 상자를 구입하지 않을 확률은?

(2)검사하는 5개 사과 중 불량 사과의 기대 개수는?

초원에 서식하는 얼룩말 수(N)를 추정하려고 한다. M마리 얼룩말을 잡아 표식을 붙이고 놓아 주었다. 일정 기간이 지난 후 n마리 얼룩말을 잡아 표식 여부를 확인하였다. n마리 중 표식이 있는 얼룩말의 수를 확률변수 X라 정의하자. 그리고 M=4, n=3이라 가정하자.

(1) $P(X=1)$일 확률을 구하시오.

(2) $P(X=1)$을 최대화 하는 모집단 얼룩말 수 N을 추정하시오.

초원에 서식하는 얼룩말의 수는 1 Acre 당 평균 5마리이고 포아송 분포를 따른다고 하자. 10 Acre를 무작위 조사하였을 때 얼룩말을 하나도 보지 못할 확률은?

하루 8시간 작업 시간 중 기계가 멈춰 서는 회수는 평균이 2인 포아송 분포를 따른다.

(1)4시간 작업하였으나 기계가 멈추지 않을 확률을 계산하시오.

(2)하루 수익은 $(50-2X-X^2)$이다. 기대 수익을 계산하시오.