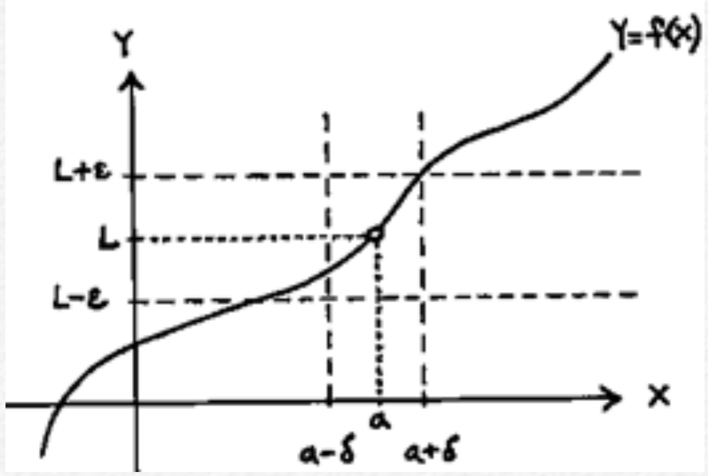
극한 Limit

함수 극한 (Limits of function values)

정의

임의의 $\varepsilon > 0$ 가 주어졌을 때, 모든 x 에 대해 $0 < |x - a| < \delta$ 을 만족하는 $\delta > 0$가 존재한다고 하자. 위의 조건을 만족하는 경우 x 가 a에 가까워지면 (접근하면, approach) 함수 $f(x)$ 극한은 존재하며 극한값은 L => $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$



(1) $\lim\limits_{x \to c} x = c$

(2) $\lim\limits_{x \to c} k = k$ (k는 상수)

극한값 구하기 $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L_1, \lim\limits_{x \to c} g(x) = L_2$

①합의 규칙: $\lim\limits_{x \to c} [f(x) + g(x)] = L_1 + L_2$

②차 규칙: $\lim\limits_{x \to c} [f(x) - g(x)] = L_1 - L_2$

③곱 규칙: $\lim\limits_{x \to c} [f(x)g(x)] = L_1 L_2$

④상수 곱의 규칙: $\lim\limits_{x \to c} [kf(x)] = kL_1$

⑤나누기 규칙: $\lim\limits_{x \to c} [\frac{f(x)}{g(x)}] = \frac{L_1}{L_2}$ 단, $L_2 \neq 0$

(정리)

다항식 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0$ ($a_0, a_1, \ldots, a_n$ 은 상수)의 극한값은 $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \ldots + a_1 c^1 + a_0$ 이다.

(예제) 다음 함수의 극한값을 구하시오.

(1) $\lim\limits_{x \to 3} x^2 (2 - x) = 3^2 (2 - 3) = -9$

(2) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 + 2x + 4}{x + 2} = \frac{2^2 + 2 \times 2 + 4}{2 + 2} = 3$

(3) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{(x-2)(x+2)} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{(x^2 + 2x + 4)}{(x+2)} = \frac{2^2 + 2 \times 2 + 4}{2 + 2} = 3$

L'Hopital's Rule

만약 $f(a) = 0, g(a) = 0$ 이고 $f'(a), g'(a)$ 가 존재한다면 $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$.

※미분은 여러 번 연속 사용가능하다.

※L'Hopital's Rule은 $\frac{0}{0}$ 인 경우 뿐 아니라 $\frac{\infty}{\infty}$ 인 경우에도 사용할 수 있다.

무한대 있는 극한 : 상수 $a > 0$

(1) $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0$ (2) $\lim_{x\to\pm\infty} x = \pm\infty$ (3) $\lim_{x\to 0} \frac{a}{x} = \infty$

(1) $\lim_{x\to\infty} (1+\frac{1}{x^2})$

(2) $\lim_{x\to\infty} (\frac{1}{x^3-4x+1})$

(3) $\lim_{x\to\infty} (\frac{3x^2-6x}{4x-8})$

(4) $\lim_{x\to\infty} (\frac{x+1}{x^2+3})$

(5) $\lim_{x\to\infty} (\frac{2}{x}+1)(\frac{5x^2-1}{x^2})$

(6) $\lim_{x\to\infty} (\frac{-x}{x+1})(\frac{x^2}{5+x^2})$

삼각함수 극한

(1) $\lim_{x\to 0} \sin x = 0$

(2) $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$

(3) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

(4) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

로그 및 지수 극한

(1) $\lim_{x\to\infty} a^x = \begin{cases} 0, 0<a<1 \\ \infty, a>1 \end{cases}$

(2) $\lim_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} \infty, 0<a<1 \\ 0, a>1 \end{cases}$

(3) $\lim_{x\to 0} e^x = 1$

(4) $\lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0$

연속 함수 (continuous function)

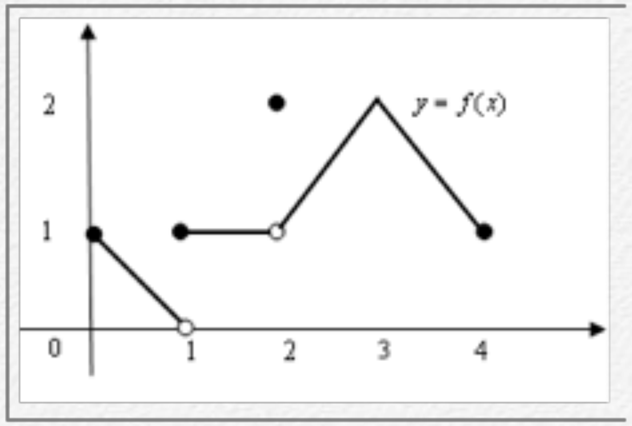
정의

만약 함수 $f(x)$ 가 $x = c$ 에서 다음이 성립하면 함수는 $x = c$ 연속이다.

(1) $f(c)$ 가 존재한다.

(2) $\lim_{x\to c} f(x)$ 극한 값이 존재한다.

(3) $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$이다.



연속함수와 미분

미분 가능하면 연속함수이지만, 연속함수라고 미분 가능한 것은 아니다. 위의 그래프에서 $x = 3$ 에서는 연속이나 미분 가능하지는(꺾인 점) 않다.