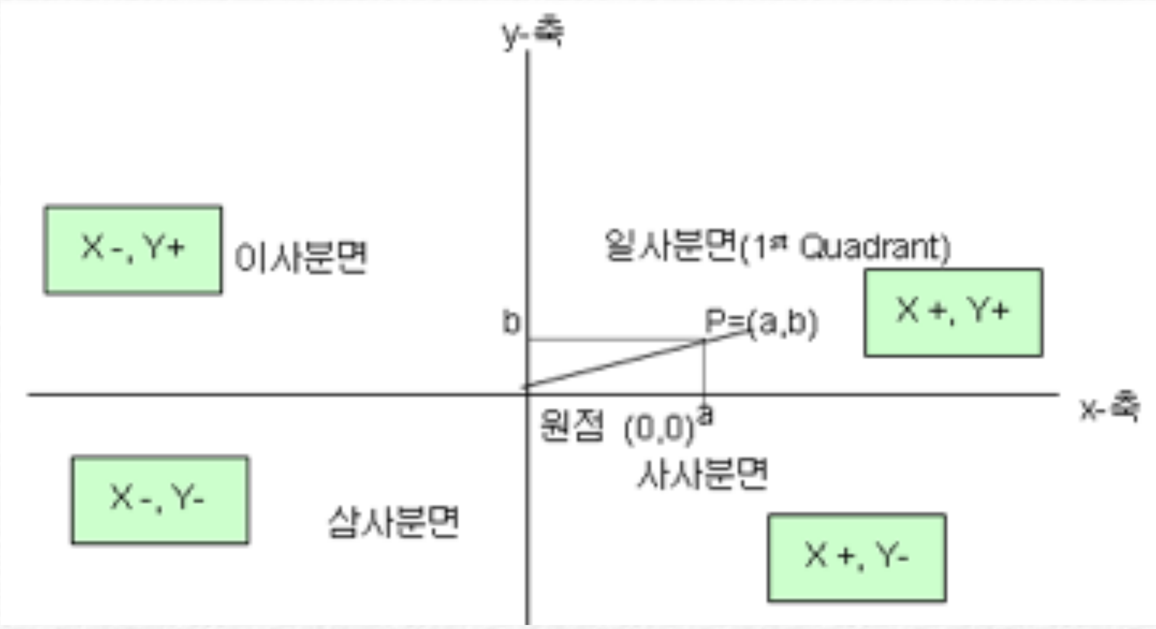
함수 & 방정식

데카르트 좌표 Cartesian Coordinate

수직선 Y-축, 수평선 X-축이 만나는 점을 원점으로 (오른쪽, 위쪽)은 +, (왼쪽, 아래쪽)은 - 값으로 점을 이차원 공간에 표현

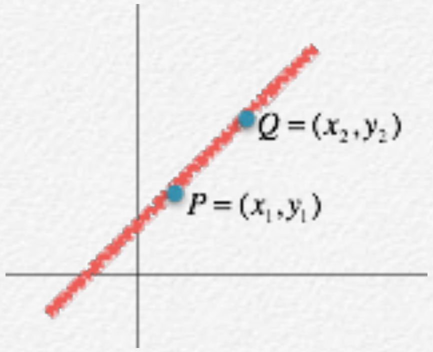
x-축으로 a, y-축으로 b만큼 떨어진 점을 좌표 (a, b)로 표현

사분면 Quadrant - 이차원 공간을 4개의 부분으로 나눔



증가, 기울기

- 증가(increment)는 순 변화를 (net change) 의미하며 좌표 P로부터 Q까지 움직였을 때 좌표의 증가는 $\Delta x = (x_2 - x_1)$, $\Delta x = (y_2 - y_1)$ 이다.
- 수직선이 아닌 직선의 기울기(slope)는 $m = \dfrac{rise}{run} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}$
- 직선의 기울기는 직선 좌표에서나 동일하다.
- 수평선의 기울기는 0이고 수직선의 기울기는 정의 불가



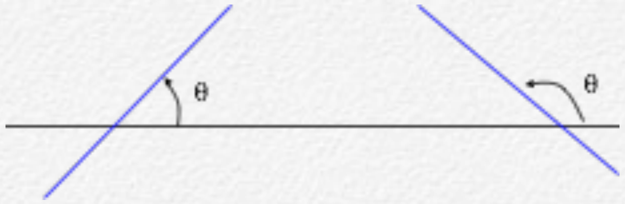
거리 Euclidean Distance

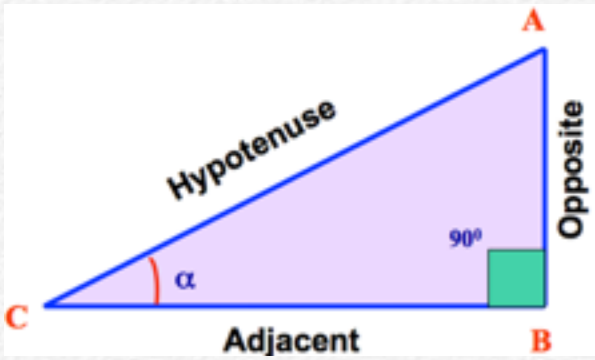
좌표에서 두 점 (P, Q) 사이의 거리(distance)는 다음과 같이 정의한다.

$$\left|PQ\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

경사각 angle of inclination

직선의 경사각은 다음과 정의되므로 기울기 $m = \tan(\theta)$ 이다.





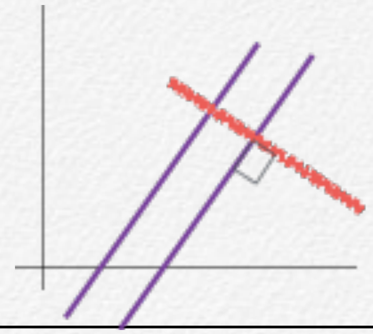
$$\sin\alpha = \frac{AB}{CA} = \frac{opposite}{hypotenuse}$$

$$\cos\alpha = \frac{CB}{CA} = \frac{adjacent}{hypotenuse}$$

$$\tan\alpha = \frac{CB}{CA} = \frac{opposite}{adjacent}$$

평행과 수직

- 두 직선의 기울기가 동일하면 두 직선은 서로 평행(parallel)
- 두 직선의 기울기의 곱이 -1이면 두 직선은 서로 수직(perpendicular)
- 수평선과 수직선은 서로 수직이다.



직선 방정식

- 직선의 방정식은 직선의 모든 점의 좌표에 의해 만족되고 직선 외의 점 좌표에서는 만족하지 않는다.
- 직선 방정식 : , 상수 a는 절편 intercept, 상수 b는 기울기 slope
- 특수 방정식 : (모든 y값)를 통과하는 수직선(vertical line)이다. <=> (모든 x값)를 통과하는 수평선(horizontal line)이다.

▣ 점-기울기 방정식

직선의 기울기가 m이고 직선의 한 좌표가 (x_1, y_1) 이면 직선의 방정식

$(y - y_1) = m(x - x_1)$

■예제■ 기울기가 $-3/2$이고 직선의 좌표가 (2,3)일 때 직선의 방정식은?

$y-3=-\frac{3}{2}(x-2) \rightarrow y=-\frac{3}{2}x+6$

그래프에 직선을 그릴 때 다음 순서를 따르면 편하다.
(1) x=0일 때 y값을 구한다. y=6
(2) y=0일 때 x값을 구한다. x=4
(3) 두 좌표를 이으면 직선이 완성된다.

▣ 점-점 방정식

■예제■ 두 점 $(-2, -1)$, $(3,4)$ 지나는 직선의 방정식은?

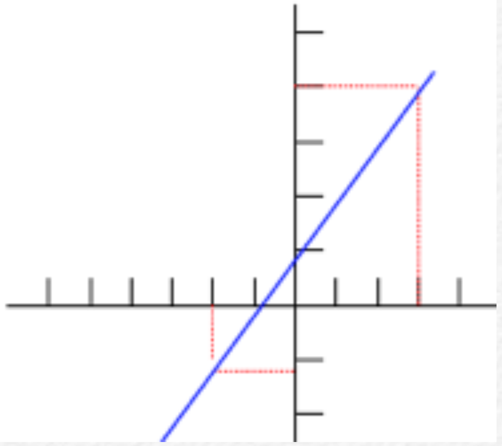
(1)우선 두 점을 이용해 기울기를 구한다.

$$m = \frac{-1-4}{-2-3} = 1$$

(2)기울기와 한 점을 이용해 직선을 구한다.

$$y - 4 = 1(x-3) \rightarrow y = x+1$$

(3)좌표에 두 점을 찍고 연결하여 직선을 구한다.

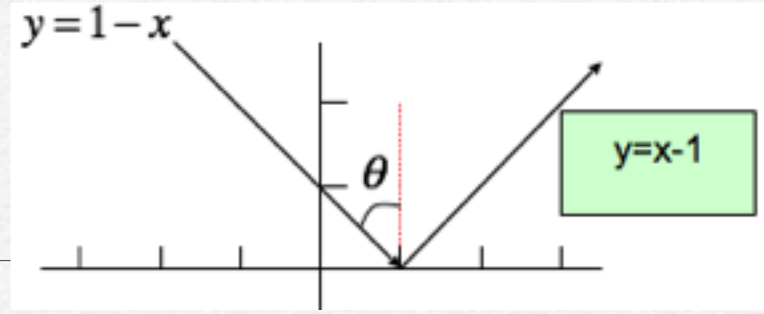


▣ 기울기-절편 방정식

직선의 기울기가 m이고 절편(intercept)을 a라 하면 직선 방정식은 $y = a + mx$ 이다. 절편은 직선이 y축과 만나는 점의 y축 좌표이다.

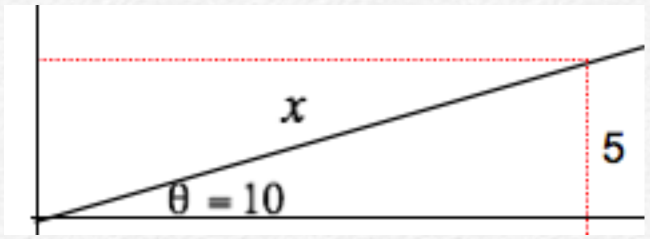
응용문제

빛은 직선 따라 들어와 지면에 들어온 각도대로 반사된다고 한다. 반사되는 빛의 경로에 대한 직선 방정식은?



응용문제

경사각이 10%인 도로가 있다. 지상에서 차가 출발하여 5km 올라갔다. 지상으로부터 얼마 높이에 있는가?



응용문제

두 함수 $x + y = 1$, $2x + ky = 1$은 수직이라 한다. k를 구하시오.

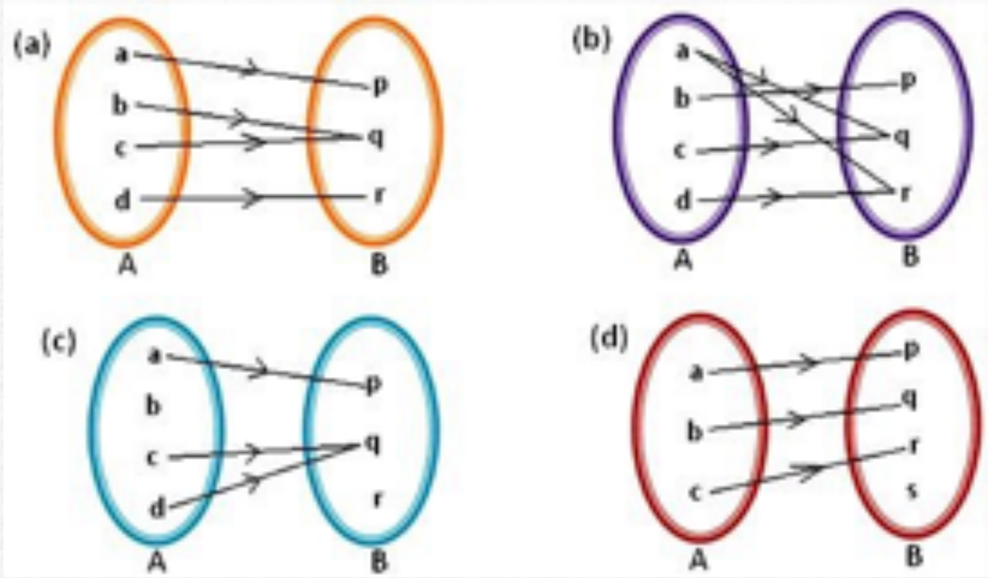
응용문제

$x + 2y = 3$와 $2x - 3y = -1$ 의 교차점(intersection)과 $P = (1.2)$ 을 지나는 직선 방정식을 구하시오.

함수 function와 그래프 graph

정의(함수)

- x가 가질 수 있는 값의 집합인 <u>정의역 혹은 영역(domain)</u> 집합으로부터 <u>치역 혹은 범위(range)</u>인 y가 가질 수 있는 값의 집합으로의 함수(function)는 정의역 각 원소(값)에 단 하나 (single) 치역 원소(값)를 할당하는 규칙을 의미한다.
- $y = f(x)$ 라 쓰고 "y는 x의 함수이다(y is a function of x)"라고 말한다.



(예제1) 화씨 온도를 (Fahrenheit) 섭씨 온도로 (Centigrade) 바꾸는 식? $C = \frac{5}{9}(F - 32)$, $C = f(F)$ - 정의역은 $\{F; -\infty < f < \infty\}$ 으로 F(화씨 온도)가 가질 수 있는 온도 값이고 치역은 C가 가질 수 있는 온도 값으로 $\{C; -\infty < c < \infty\}$ 이다.

(예제2) 아이 IQ(Y)는 엄마 IQ(X)에 의존할 가능성이 있다. 만약 y의 값이 전적으로 x에 의해서만 결정된다면 y는 x의 함수이라 (function) 한다- $CIQ = f(MIQ)$. 그러나 아이 IQ는 전적으로 엄마 IQ에만 의존하는 것은 아니므로 이를 다루는 회귀분석에서는 $CIQ = f(MIQ) + e$ (통계모형) 관계를 다룬다. 여기서 오차 e는 백색잡음(팬턴 없음)인 정규분포를 따른다고 가정한다.

정의역과 치역

대부분의 정의역과 치역은 구간(Interval)으로 되어 있으며 가질 수 있는 가능한 모든 값들의 모임이다. 구간의 양 끝 값을 경계 값(boundary point) 이라 하고 구간 내의 값은 내부 값(interior point)이라 한다.

Open interval (열린 구간)- (a, b)-구간의 양 끝 값을 모두 포함하지 않는다.

Closed interval (닫힌 구간)- $[a, b]$-구간의 양 끝 값을 모두 포함한다.

Half-open interval (반 열린 구간)- $[a, b)$ -한쪽 값만 포함한다.

함수 그래프 그리기

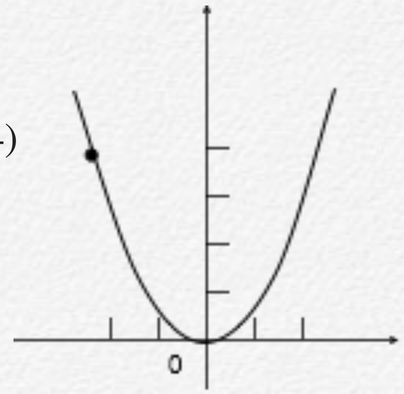
함수 $y = f(x)$의 관계를 2차원 공간(x-축, y-축) 좌표에 표현한 것을 그래프라 하는데, 정의역 값을 X-축에 그에 대응하는 값을 Y-축에 나타낸 좌표 점들을 연결하여 놓은 것이다.

(예제) $y = x^2, -2 \leq x \leq 2$

[STEP1] 계산이 용이한 x값을 선택하여 $x = (-2, -1, 0, -1, -2)$, y값을 $y = (4, 1, 0, 1, 4)$ 구한다.

[STEP2] 2차원 공간에 좌표를 표시한다.

[STEP3] 좌표를 연결하여 그래프를 그린다.

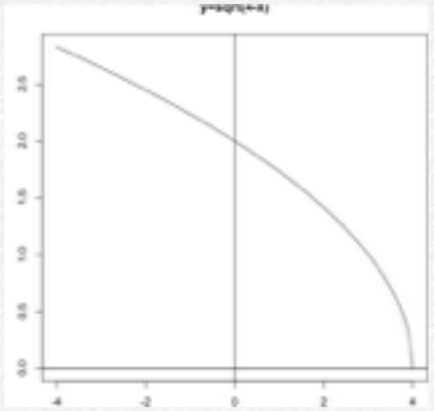


(예제) $y = \sqrt{4 - x}$

[STEP1] 함수의 Domain을 결정해야 한다. Root 안의 값은 0보다 커야 하므로 $4 - x \geq 0$이 함수의 Domain은 이다.

[STEP2] 계산이 용이한 x값을 선택하여 y값을 구한다.

[STEP3] 좌표를 연경하여 그래프를 그린다.



응용문제

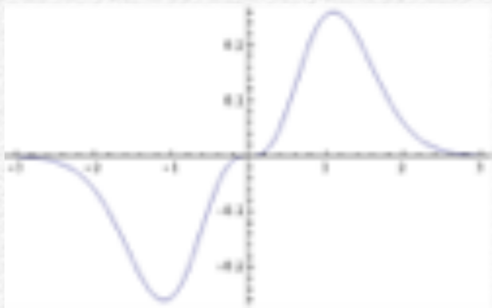
다음 함수를 그리시오.

① $y = -\dfrac{1}{x^2 + 2}$　　② $y = -\dfrac{1}{x} + 3$

③ $y = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, -6 < x < 6$

우함수와 기함수

- 만약 $f(-x) = f(x)$ 이면 함수 $f(x)$ 는 우함수(even function)라 한다 – y-축 기준 데칼코마니
- 만약 $f(-x) = -f(x)$이면 함수 $f(x)$는 기함수(odd function)라 정의 – $y = -x$ 기준 데칼코마니
- (참고) 역함수 $y = f(x) \Rightarrow f^{-1}(y) = f^{-1}f(x) = x$ – $y = x$ 기준 데칼코마니



응옹문제

다음 함수 형태가 우함수 , 기함수, 일반 함수(Neither)인지 밝히시오.

$(1) y = x + x^3$　　$(2) y = x + x^2$　　$(3) y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

$(4) y = \frac{1}{x-1}$ $(5) y = \frac{x^2}{x^2-1}$

(6) $f(x)$ 기함수, $g(x)$ 우함수 일 경우

(1)두 함수의 곱은 어떤 함수?

(2)두 함수의 합은?

(7) $f(x)$기함수, $g(x)$ 기함수 일 경우

(1)두 함수의 곱은 어떤 함수?

(2)두 함수의 합은?

(8) 다음 마술을 함수로 나타내 보시오. 마음으로 숫자(x)를 생각하시오. "그 숫자에 5를 더하고 2를 곱하시오. 결과에 6을 빼고 2로 나눈 후 2을 다시 2를 빼시오. 이제 숫자를 말하시오. "참여자가 5라고 말했다" 이 마술에서 숫자를 어떻게 맞출 수 있을까?

절대값 함수

임의의 실수 x의 절대값은 $|x|$로 표현하고 다음과 같이 정의한다.

$$|x| = \begin{cases} x \; if \; x \geq 0 \\ -x \; if \; x < 0 \end{cases}$$

실수 a, b에 대하여 $(1) |-a| = |a|$, $(2) |ab| = |a||b|$

삼각 부등식 triagular ineqaulity

$|a+b| \leq |a| + |b|$ (만약 a, b의 부호가 같으면 =, 그렇지 않으면 < 성립

절대값과 구간 - a는 실수, D는 양의 실수

$(1) |a| \leq D \Leftrightarrow -D \leq a \leq D$ $(2) |a| \geq D \Leftrightarrow a \leq -D, a \geq D$

응용문제

다음 방정식의 해를 구하시오.

$(1) |2x-3| = 7$ $(2) |x/2-1| = 1$

다음 부등식에서 x의 구간을 구하시오.

① $\left|\frac{2x+1}{3}\right| < 1$ ② $|3x-7| \leq 2$ ③ $|1-x| \geq 2$

정수함수 Intger Function

$f(x) = \lfloor x \rfloor$, x를 넘지 않는 최대정수

$\lfloor 1.2 \rfloor = 1$, $\lfloor 1.6 \rfloor = 1$, $\lfloor 0 \rfloor = 0$, $\lfloor -0.5 \rfloor = -1$, $\lfloor -2.7 \rfloor = -3$

$f(x) = \lfloor x \rfloor$, $-3 < x \leq 3$ 함수의 그래프를 그리시오.

방정식 equation

정의

- 방정식(equation)은 식에 있는 특정한 문자의 값에 따라 참/거짓이 결정되는 등식
- 방정식을 참이 되게 하는 특정 문자의 값을 해 solution 또는 근 root
- 방정식의 해는 (1) 없을 수도 있고 (불능 $(2)x^2 + x - 4 = 0$ no solution), (2) 한정된 개 수일 수도 있고(항등식), (3) 모든 값일 수도 있음(부정 infinite)

직선(선형 Linear) 방정식 Linear Equation $Y = a + mx$

- (x, y)는 변수, (a, m)은 상수 constant
- 일변수 one variable, $mx = a$ => $x = \dfrac{a}{m}$
- 이변수 two variables, $y = mx + a$ - 방정식 1개, 변수 2개이므로 하나의 변수 값을 지정해야 다른 변수의 값을 구할 수 있다.

다항 방정식 Polynomial Equation

- $P(x) = a_1x^n + a_2x^{n-1} + \cdots$: n이 2보다 큰 정수이거나 소수인 경우 - 비선형 nonlinear 이라고 한다.
- 일반적으로 $P(x) = 0$을 구한다.

2차 방정식 $ax^2 + bx + c = 0$

- 근의 공식 - $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
- 해를 가질 조건 - 판별식 $b^2 - 4ac > 0$
- 인수분해 Factoring : $(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd$

$x^2 - 6x + 8 = 0$ 의 해를 구하시오.

(순서1) 상수를 곱으로 표현한다, (1, 8), (2, 4)

(순서2) 두 숫자를 더하거나 빼서 x의 상수를 만들 수 있는지 계산한다.

(순서3) (-2)X(-4)=8

(순서4) $(x - 2)(x - 4) = 0$

```
> polyroot(c(8,-6,1))
[1] 2+0i 4-0i
```

(연습문제)

$(1)x^2 - 3x - 4 = 0$ $(2)x^2 + x - 4 = 0$

3차 방정식 $ax^3 + dx^2 + cx + d = 0$

(1) 인수분해를 활용하여 1차식과 이차식으로 분해하여 해를 구한다.

우선 상수 d/a를 인수분해 한다. 54의 인수를 구한다. 2, 3, 6, 9

$x^3 - 8x^2 - 15x + 54 = 0$

2	1	-8	-15	54
		2 +	-12 +	-54 +
		-6	-27	0

(2) 카르다노(Girolamo Cardano) 해법

연습문제

(1)$x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 5x + 2 = 0$ (2)$x^4 + x^3 - 3x^2 + 2 = 0$

http://mathbang.net/341

1	1	-4	6	-5	2	
		1	-3	3	-2	
2	1	-3	3	-2	0	
		2	-2	2		
	1	-1	1	0		

$x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 5x + 2 = 0$

$(x-1)(x-2)(x^2 - x + 1) = 0$

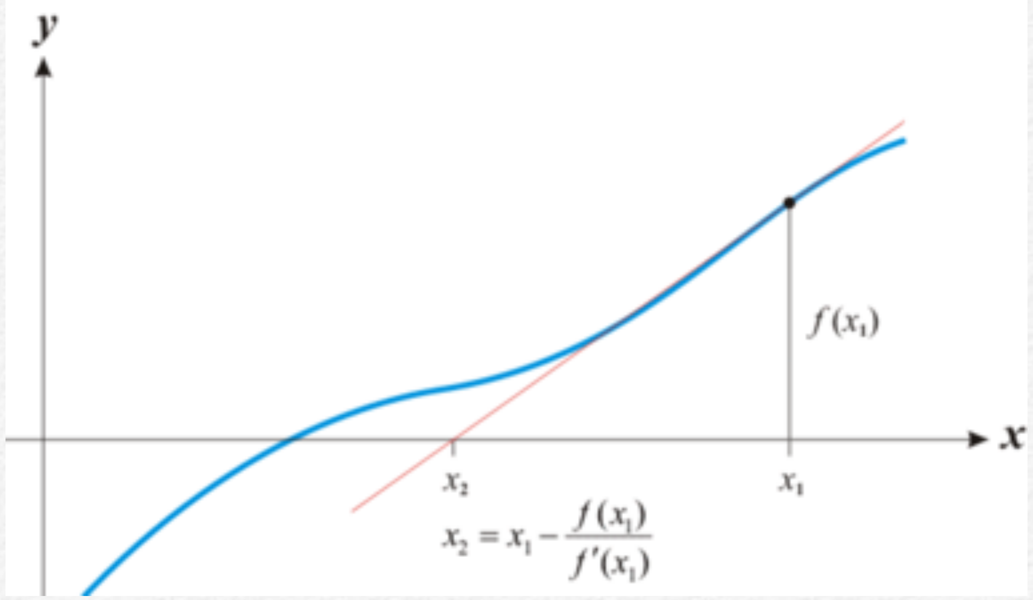
1	1	1	-3	-1	2	
		1	2	-1	-2	
-1	1	2	-1	-2	0	
		-1	-1	2		
	1	1	-2	0		

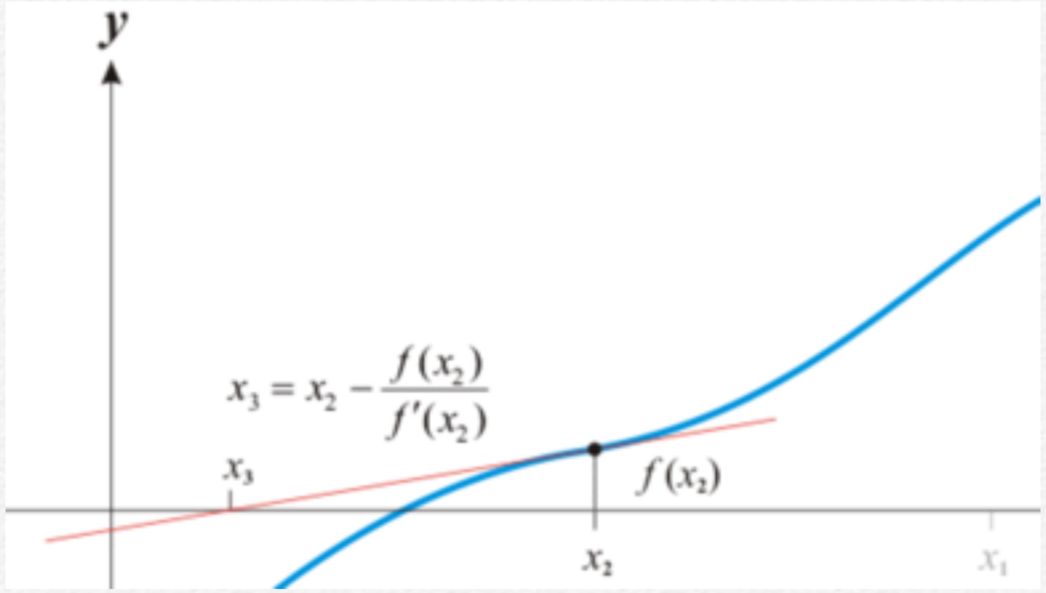
$x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2 = 0$

$(x-1)(x+1)(x^2 + x - 2) = 0$

$(x-1)(x+1)(x-1)(x+2) = 0$

$(x-1)^2(x+1)(x+2) = 0$





Newton-Rahpson : $\{x; f(x) = 0\}$

$$f'(x_1) = \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_2)} \Rightarrow x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \Rightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

만약 $f(x_{n+1}) \approx 0$ => x_{n+1}이 해가 된다.

(연습문제) $x^4 + x^3 - 3x^2 + 2 = 0$ 그래프를 그리고 해를 구하자.

(1) polyroot() 함수 사용

(2) Newton-Rahpson 방법 사용 (스크립트 이용)