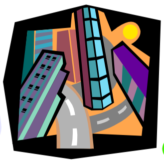
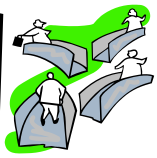
Chapter 2. 확률

모집단: $x_i \sim f(x;\theta)$
Unknown: f (확률밀도함수)와 모수 θ

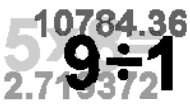
사회 현상, 자연 현상을 관찰하여 통계적 가설을 설정한다. 통계적 가설에는 귀무가설(null hypothesis: H_0, “=”, “관계가 없다(서로 독립이다)”, “영향을 미치지 않는다”)과 대립가설(H_a, alternative, research hypothesis “>”, “≠”, “관계가 있다”, “영향을 미친다”)로 이루어져 있다.

데이터

통계적 가설 검정(testing)을 위한 모집단으로부터 표본을 추출하고 관련 데이터(변수와 개체의 관측치) 수집한다. 검정한다는 것은 어느 가설이 맞는지 알아본다는 것이다. 통계적 가설 검정의 신뢰수준(반대로 유의수준)을 정하고 가설을 검정한다.

관측치: $(x_1, x_2, ..., x_n)$ 변수 하나인 경우: 일변량 univariate

통계량 계산



표본으로부터 계산한 값들을 통계량(statistic)이라 한다. 모수를 추정하기 위한 추정치, 가설 검정을 위한 검정통계량을 계산한다.

결론: 검정통계량이 기각역에 속하는지, 유의확률을 계산하여 가설 검정 결론을 내린다. 가설 검정을 위해서는 검정통계량의 “확률밀도함수”를 알아야 한다.

확률밀도함수는 확률변수(관측치, X)와 확률($f(x)$)을 대응시킨 것으로 기각역 계산이나 유의확률 계산에 사용된다. 이를 위하여 우선 확률의 개념을 먼저 살펴보자.

Prof. Sehyug Kwon, Dept. of Statistics, HANNAM University
http://wolfpack.hannam.ac.kr @2010 Fall

2.1 개요

도박 오래 기간 "확률" 계산에 많은 관심을 보여 왔으나 정확한 수학적 개념 정립은 얼마 되지 않았다. Probability(확률)은 미래 일어날 사건이나 불확실성에 대한 믿음에 대한 측정이다. 확률은 미래에 일어날 사건에 대한 양적 표현(값)을 제공한다. 확률은 0에서 1사이의 값으로 측정되며 일어날 가능성이 희박하면 0, 높으면 1에 가까운 값으로 표현한다.

Probability은 실험 결과들의 상대빈도(확률)와 분포를 이용하여 주어진 사건의 가능한 결과를 연구하는 수학이다. 확률이 계산되는 사건의 분석을 통계학이라 한다.

데이터가 얻어지는 과정이나 연구를 실험(experiment)이라 하면 실험의 결과(값)는 예측할 수 없다. 확률에서 실험이란 확률 실험(random experiment)을 의미하며 실험의 결과를 예측할 수 없는 실험을 의미한다.

2.1 확률 측정(정의)

확률을 어떻게 정의할 것인가? 측정할 것인가?

①Frequentists: Long-term 상대빈도: 실험을 n번 시행했을 때 사건 A의 상대빈도는 $\dfrac{\# of\ A}{n}$ 이므로 실험을 무한 번 했을 경우 상대 빈도를 확률이라 정의한다.

$P(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\#\ of\ A}{n}$. 무한정 반복 실험한다?

②고전적 정의(Pierre-Simon Laplace, French, 1749-1827): 확률 실험에서 나타날 수 있는 결과들의 모임을 표본공간(sample space), 표본공간을 구성하는 각 결과를 원소(element)라 정의한다. 모든 원소(결과)가 관측될 가능성이 동일하다고 가정하면 (**equally likely**) 사건 A의 확률은 $P(A) = \dfrac{\#\ of\ \text{elements in } A}{\#\ of\ \text{elements in } S}$ 으로 정의한다.

③Bayesians: 모수를 추정하기 위하여 관측된 표본 데이터의 의해 확률밀도함수를 update하는 방법.

2.2 확률과 추론

EXAMPLE 2-1 확률과 추론(1)

동전을 10번 던져 10번 모두 앞 면이 나왔다. 이 동전이 공정(fair)하다는 가설이 적절한가?

"동전이 공정하다"는 가설 하에서는 10개 모두 앞 면이 나올 가능성의 희박(improbable)하다. 그러므로 실험 결과(표본) 이 가설을 기각하게 된다.

EXAMPLE 2-2 확률과 추론(2)

H 대학 관계자는 학생들의 IQ가 120 이상이라고 주장한다. 이를 알아보기 위하여 그 대학에 재학 중인 대학생 20명을 무작위 추출하여 조사하였더니 평균 125, 표준편차가 5였다. 그의 주장이 맞는가?

2.3 집합 기호

2.3.1 표본공간과 집합

결과를 예측할 수 없는 확률실험(random sample)의 결과를 모든 모아 놓은 것을 표본공간(sample space)라 하고 기호는 S or $S=\{e_1,e_1,e_3,...\}$ 으로 나타낸다. e_i 는 원소(element)로 실험 결과를 의미한다. 표본공간을 전체집합(Universal set)이라 부르기도 한다.
집합은 관심 있는 원소(결과)들의 모임을 의미하며 집합 A, 혹은 $A=\{a_1,a_2,...\}$ 으로 나타낸다. 확률이 정의된 실험 결과들이 모임을 사건(event)이라 한다.

EXAMPLE 2-3 집합(1)

주사위를 던지는 실험에서

①표본공간 $S=\{1,2,3,4,5,6\}$

②2 이상이 숫자가 나타나는 집합 $A=\{2,3,4,5,6\}$

③나타난 숫자가 짝수인 집합 $B=\{2,4,6\}$

2.3.2 부분집합

집합 A의 모든 원소가 집합 B에 있는 경우 집합 A는 집합 B에 부분집합이라 하고 기호는 다음과 같다. $A \subset B$

집합 A에 원소가 하나도 없는 것을 영집합(null set)이라 하고 $A=\varnothing$ 으로 표시한다.

EXAMPLE 2-4 집합(2)

EXAMPLE 2-3에서

①집합 B는 집합 A의 부분 집합이다.

②집합 C를 0이라 정의하면 $C=\varnothing$ 는 공집합이다.

2.3.3 합, 공통

집합 A, 집합 B에 모두 있는 원소들의 모임을 집합 A, B의 공통(intersection)이라 하고, 기호로는 $A \cap B = AB$ 을 사용한다. ⇔ **AND, BOTH**

집합 A 혹은 집합 B에 있는 원소들의 모임을 집합 A, B의 합(union)이라 하고, 기호로는 $A \cup B$)을 사용한다. ⇔ **OR, AT LEAST ONE**

2.3.4 여집합

집합 A에는 없고 표본공간에 있는 원소들의 모임을 A 의 여집합(complement) 라 하고 기호는 A^c or $\bar{A}$ 으로 나타낸다. ⇔ **NOT**

EXAMPLE 2-5 집합(2)

EXAMPLE 2-3에서 집합 D를 홀수라 정의하면 $D = \{1,3,5\}$

①집합 A와 집합 D의 합은 $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\} = S$

②집합 A와 집합 D의 공통은 $A \cap D = \{3,5\} = S$

③집합 B와 집합 D의 공통은 $B \cap D = \varnothing$

④집합 A의 여집합은 $\bar{A} = \{1\}$

2.3.5 상호배반

만약 $A \cap B = AB = \varnothing$ 이면, 집합 A, B 는 상호배반(mutually exclusive)이라 한다.

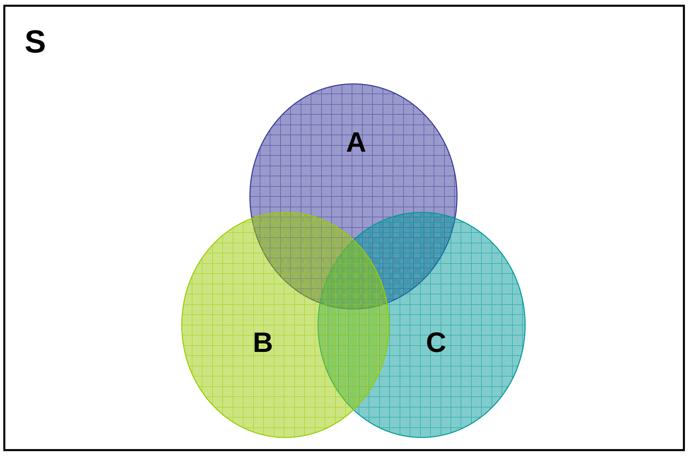
2.3.6 법칙

①Distribution Law
$$(1) A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$(2) A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

②Associate Law
$$(1) A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$
$$(2) A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

③DeMorgan's Law
$$(1) \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$
$$(2) \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

2.3.6 Venn Diagram



HOMEWORK #1-1

주사위를 한번씩 두 번 던져 나타난 결과를 적는다. 모든 가능한 쌍(pair)을 표본공간(S)이라 정의하자. 집합 $A=\{$두 번째 주사위 눈금이 짝수$\}$, $B=\{$두 주사위 눈금의 합이 짝수$\}$, $C=\{$두 주사위 눈금 중 적어도 하나가 홀수$\}$라 정의할 때 다음을 구하시오.

$A, \bar{C}, A\cap B, A\cap \bar{B}, \bar{A}\cup B,$ and $\bar{A}\cap C$

HOMEWORK #1-2

동전을 무한히 많이 던지는 실험을 생각해 보자. $S=\{e=(e_1,e_2,\ldots)\}$, *where* $e_i = H$ or T. 집합 $A_n=\{e_n=H\}$을 n번째 던진 동전이 앞 면이라고 정의하자.

(1)집합 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ 은 어떤 의미인가?

(2)집합 $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ 은 어떤 의미인가?

2.4 확률모형: 이산형

2.4.1 확률실험

확률실험(Random experiment)은 실험을 시행하기 전에는 결과를 예측할 수 없는 실험이라 정의한다. 예제 (1)주사위 던지는 실험 (2)환자의 혈압 (3)다리가 무너지기 전까지 견디는 하중 (4)통계원리 시험성적

2.4.2 단순사건

사건(event)는 확률이 정의된 원소들의 모임이다. 단순사건(simple event)는 나누어질 수 없는 사건을 의미하면 표본공간의 원소와 같은 개념이다. 즉 확률이 정의된 원소를 단순 사건이라 생각하면 된다.

2.4.3 이산형 표본공간

표본공간의 원소가 유한(finite) 개이거나 셀 수 있는 경우 이를 이산형 표본공간이라 한다. 주사위 두 개를 던져 나온 합, 동전을 무한 번 던지는 실험, 제품에 포함된 불량의 개수, 시험에서 맞은 개수 등이 이산형 표본공간이다.

2.4.4 확률 공리

다음 공리를 만족하는 측정(measure)을 확률이라 정의한다.

① $0 \le P(E) \le 1$

② $P(S) = 1, P(\emptyset) = 0$

③사건 E_1, E_2 가 상호 배반(mutually exclusively)이면 , $P(E_1 + E_2) = P(E_1) + P(E_2)$

2.4.5 유한 확률모형 규칙

Rule1 사건 E 확률 $P(E)$ 는 사건 E 을 구성하는 단순사건 확률의 합과 같다.

Rule2 확률실험의 모든 단순사건 확률의 합은 1이다.

Rule3 uniform probability model에서 단순사건 확률은 is $1/M$ 이고 사건 E 의 확률은 K/M 이라 정의한다. M 은 표본공간의 단순사건의 개수이고 K 는 E 의 단순사건의 개수이다. (**equally likely**)

EXAMPLE 2-6 확률 공리(1)

주사위를 한 번 던져 나오는 눈금을 적는 실험에서 확률을 다음과 같이 정의하였다. 확률의 공리는 만족하는가?

$P(\{1\}) = 0.5$, $P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\}) = 0.1$

EXAMPLE 2-7 확률 공리(2)

표본공간의 5개의 단순 사건 e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 으로 구성되어 있다.

만약 $P(e_1) = P(e_2) = 0.15, P(e_3) = 0.4$ and $P(e_4) = 2P(e_5)$ 라고 하면, $P(e_5)$ 을 계산하시오.

HOMEWORK #1-3

EXAMPLE 2-7에서

만약 $P(e_1) = 3P(e_2) = 0.3$ 이고 나머지 단순 사건 확률이 동일하다면, $P(e_5)$ 을 계산하시오.

EXAMPLE 2-8 확률 공리(3)

동전을 2개 던지는 실험에서…

(1)나올 수 있는 모든 결과(원소)을 나열하시오. 즉 표본공간 S를 구하시오.

(2)각 원소(단순 사건)에 확률을 할당하시오.

(3)사건 A 는 앞 면이 정확하게 한 개, 사건 B 는 앞 면이 적어도 한 개라 정의할 때 다음 확률을 구하시오. $A, B, A \cap B, A \cup B, A^c \cup B$

HOMEWORK #1-4

헌혈하려는 사람의 혈액형을 조사하였더니 3명 중 1명이 O^+ 형, 15명 중 1명이 O^- 형, 3명 중 한 명이 A^+, 16명 중 한 명이 A^- 이었다. 헌혈자 한 명을 임의로 선택하였을 때

(1)혈액형이 O 형일 확률?

(2)혈액형이 A 형일 확률?

(3)혈액형이 O 형도 A 형도 아닐 확률?

2.5 확률계산 방법

⑴표본공간과 원소를 정의한다.

⑵각 원소에 확률의 공리와 “equally likely”이용하여 확률을 할당한다.

⑶사건을 정의한다. 즉 원소를 나열한다.

⑷사건을 구성하는 원소의 확률을 더하여 사건의 확률을 구한다.

EXAMPLE 2-9 확률 계산(1)

공정한 동전 3개를 던지는 실험에서 앞 면의 개수가 정확하게 2개인 사건에 대한 확률을 계산하시오.

⑴표본공간과 원소를 정의한다. $S=\{$

⑵각 원소에 확률을 할당한다.

⑶사건을 정의한다. $E=\{$

⑷ $P(E)$ 확률을 구한다.

HOMEWORK #1-5

테니스 선수 A가 B보다 실력이 월등하여 이길 확률이 2/3이다. 두 선수가 게임을 두 번 할 경우 선수 A가 적어도 한 번은 이길 확률을 계산하시오.

HOMEWORK #1-6

4명의 지원자 중 1명이 여자이고 3명이 남자이다. 2명이 합격된다고 했을 그 중 한 자리가 여자 지원자로 채워질 확률을 계산하시오.

2.6 확률계산 도구

① mn: m개의 서로 다른 원소와 n개의 서로 다른 원소에 의한 결합 가지 수

EXAMPLE 2-9 확률 계산(2)

20명의 학생을 무작위 추출하였을 때 생일이 서로 다를 확률을 계산하시오.

② $_nP_r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$ (permutation: 순열): n개의 서로 다른 개체 중 r 개를 선택하여 순서대로 나열하는 가지 수 (의미) n개의 의해 만들어지는 가지 수 $n!$, 나머지 $(n-r)$ 에 의해 만들어지는 가지 수 $(n-r)!$으로 나눈 값이다.

EXAMPLE 2-10 확률 계산(3)

비밀번호가 4자리 숫자로 되어 있다. 첫 자리 숫자로 0이 가능하고 동일한 숫자를 사용할 수 없다고 가정할 경우 가능한 비밀번호의 수는?

만약 앞 자리를 0으로 사용할 수 없다면?

③ $_nC_r = \dfrac{n!}{(n-r)!r!}$ (combination 조합): n개의 서로 다른 개체 중 r 개를 선택하는 가지 수, 순서는 고려하지 않으므로 순열 가지 수를 $r!$으로 나누면 된다.

EXAMPLE 2-11 확률 계산(4)

1~5까지의 정수 중 2개의 숫자를 뽑을 경우의 수는? 3개의 숫자를 뽑을 경우의 수는?

EXAMPLE 2-12 확률 계산(5)

여자 3명, 남자 5명이 있다. 임원을 3명 선발할 때 여자에서1명, 남자에서 2명 뽑을 경우의 수는?

HOMEWORK #2-1

$_nC_r = {}_nC_{n-r}$ 임을 보이시오.

HOMEWORK #2-2

⑴52장의 Playing card에서 3장의 카드를 뽑을 때 발생하는 경우의 수는?

⑵52장의 Playing card에서 3장의 카드를 뽑을 때 ACE에서 1장, 그림 카드에서 2장 뽑을 경우의 수는?

④ $\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$, $\sum_{k=1} n_k = n$ (multinomial): n 개의 개체를 k 개의 서로 다른 그룹으로 나뉠 때 발생하는 경우의 수($n_1, n_2, \ldots, n_k$ 는 각 그룹의 개수)이다.

EXAMPLE 2-13 확률 계산(6)

20명의 근로자를 공장 A(6명), B(4명), C(5명), D(5명)에 배정하려고 한다, 경우의 수는?

다항(multinomial) 경우의 수 $\frac{20!}{6!4!5!5!}$

EXAMPLE 2-14 확률 계산(7)

기업에서 M 개 하청업체로부터 n 개 주문을 하려고 한다. $n < M$.

①하청업체 A가 정확하게 $k(\le n)$ 개 주문을 받을 확률을 계산하시오.

② $M = 10, n = 7$, 하청업체 A가 2개 주문, 하청업체 B가 3개 주문 받을 확률을 구하시오.

n개의 각 주문이 배정될 경우의 수는 M 하청업체이므로 총 경우의 수는 M^n

n개 주문 중 k개 고를 확률은 $\binom{n}{k}$ 이므로 ①의 답은 $\frac{\binom{n}{k}(M-1)^{n-k}}{M^n}$ 이다.

HOMEWORK #2-3

9명의 스케이트 선수가 대회에 출전하였다. 3명은 서울, 3명은 대전, 3명은 부산 출신이다. 선수들의 능력은 동일하다고 하자. 대회 결과 대전 지역 출신 선수가 1, 2, 3등 할 확률을 계산하시오.

HOMEWORK #2-4

50장의 복권 중 3장이 당첨 복권이다. 우리 가족 4명이 복권 한 장씩 구입하였다.

①우리 가족이 모두 당첨될 확률은?

②우리 가족이 2개 당첨될 확률은?

③우리 가족 아무도 당첨되지 않을 확률은?

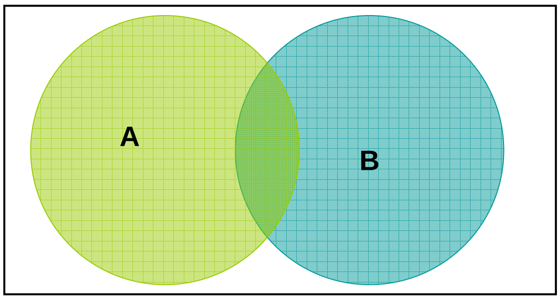
HOMEWORK #2-5

주사위 앞면이 1, 2, 3, 4, 5, 5이다. 5번 던졌을 때 1, 2, 3, 4, 5 각각 한 번씩 나올 확률을 계산하시오. 순서는 상관 없다.

2.7 조건부 확률과 독립

DEFINITION 사건B가 주어졌을 때(일어났을 때) 사건 A 의 확률은 $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$, 단 $P(B)>0$ 정의하고 이를 조건부 확률(conditional probability)이라 한다.

만약 사건 B가 표본공간 S 라면 이를 unconditional(무조건) 확률이라 정의한다. $P(S)=1$ 이므로 $P(A|S)=\dfrac{P(AS)}{P(S)}=P(A)$ 이다.



EXAMPLE 2-15 조건부 확률

주사위 눈금이 3이 나올 확률을 1/6이다. 만약 눈금이 홀수가 나왔다는 사실을 알고 있다면(주어졌다면) 눈금이 3일 확률은 1/3이다.

DEFINITION 다음 조건을 만족하면 두 사건이 A, B 는 서로 독립이라 한다.

① $P(AB)=P(A)P(B)$ ② $P(A|B)=P(A)$ ③ $P(B|A)=P(B)$

DEFINITION 다음 조건을 만족하면 사건 $E_1, E_2, ..., E_k$ 는 mutually independent(서로 독립)

$$P(E_1E_2...E_k)=P(E_1)P(E_2)...P(E_k)$$

DEFINITION 다음 조건을 만족하면 사건 E_i, E_j 는 pairwise independent(상호 독립)

$$P(E_iE_j)=P(E_i)P(E_j)$$

EXAMPLE 2-17 조건부 확률 및 독립

재범 가능성은 학력에 따라 다를 것이라 생각하여 자료 수집 결과 다음 데이터를 얻었다.

	재범	범죄 않음
대졸	10	30
고졸	27	33

사건 A ={대졸 학력 가진 사람}, 사건 B ={재범}

다음 확률을 계산하시오.

$(1)A, (2)B, (3)AB, (4)A\cup B, (5)\bar{A}, (6)A\,|\,B, (7)B\,|\,\bar{A}$.

$(1)P(A)$ $(2)P(B)$ $(3)P(AB)$ $(4)P(A\cup B)$ $(5)P(\bar{A})$ $(6)P(\overline{A\cup B})$ $(7)P(\overline{AB})$

(8)Are they independent?

EXAMPLE 2-16 서로 독립

커피 브랜드 X, Y, 그리고 Z 세 종류가 있다. 커피 맛에 따라 소비자자 순위를 매긴다고 해 보자. 사건 A={브랜드 X가 브랜드 Y보다 선호}, 사건 B={브랜드 X가 최고의 등급}, 그리고 사건 C={브랜드 X가 2번째 등급}, 그리고 사건 D ={브랜드 X가 3번째 등급}이라고 정의하자. Are they mutually independent or pairwise independent?

X	Y	Z
1	2	3
1	3	2
2	1	3
2	3	1
1	2	3
1	3	2

총 경우의 수는 6가지, 3*2*1=6

$1/6 = P(AC) = P(A)P(C) = 1/2 * 1/3 = 1/6$ 그러므로 A와 C는 독립

HOMEWORK #3-1

두 사건 A, B 에 대해 $P(A) = 0.5, P(B) = 0.3, P(A\cap B) = 0.1$ 이 성립한다.

$(1)P(A\,|\,B)$ $(2)P(B\,|\,A)$

$(3)P(A\,|\,A\cup B)$ $(4)P(A\,|\,A\cap B)$ $(5)P(A\cap B\,|\,A\cup B)$

HOMEWORK #3-2

①사건 A, B는 상호 배반이다. 서로 독립인가? 증명하시오.

②만약 $P(A) > 0, P(B) > 0$ 이고 $P(A) < P(A\,|\,B)$ 이면 $P(B) < P(B\,|\,A)$ 임을 증명하시오.

③If $A\subset B$, are A, B independent? Prove it.

④두 사건 A, B 는 서로 독립이다. 사건 $A, \bar{B}$ 는 서로 독립인가? 보이시오.

2.8 확률 법칙

Multiplicative Law of probability[THEOREM]

$P(AB) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$ (조건부 확률 정의에 의해서)

사건 A, B 가 서로 독립이면 $P(AB) = P(A)P(B)$ 이다.

Additive Law of probability[THEOREM]

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$\boxed{\text{PROOF}}$ $P(A \cup B) = P(A) + P(\bar{A} \cap B)(\because disjoint) = P(A) + P(B) - P(AB)$

$\boxed{\textbf{THEOREM}}$ $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ **(PROOF:** $P(S) = P(A \cup \bar{A})$**)**

EXAMPLE 2-17 조건부 확률 및 독립

① $P(A) = P(AB) + P(A\bar{B})$ 임을 증명하시오. (사건 A분할).

②사건 A, B 가 독립이면 사건 $\bar{A}, \bar{B}$ 가 서로 독립임을 보이시오.

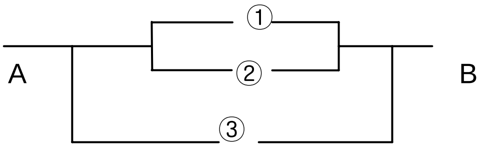
EXAMPLE 2-18 조건부 확률 및 독립

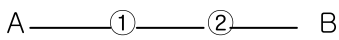
사건 A, B 가 독립일 때 (1)$P(A \cup B)$ (2)$P(\bar{A} \cap \bar{B})$ (3)$P(\bar{A} \cup \bar{B})$ 을 계산하시오.

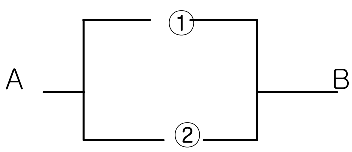
EXAMPLE 2-19 조건부 확률

전기가 A에서 B로 흐르고 중계기가 작동할 확률이 0.9이고 서로 독립적으로 작동한다.

각 상황에서 전기가 흐를 확률을 계산하시오?

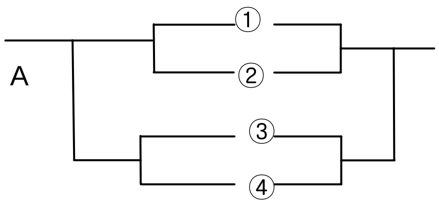


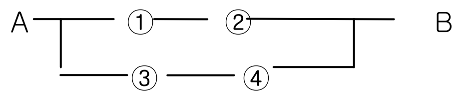


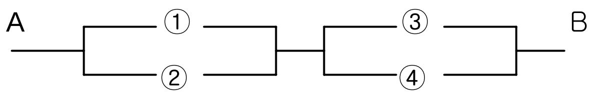


HOMEWORK #3-3

전기가 A에서 B로 흐르고 중계기가 작동할 확률이 0.9이고 서로 독립적으로 작동한다. 각 상황에서 전기가 흐를 확률을 계산하시오?







HOMEWORK #3-4

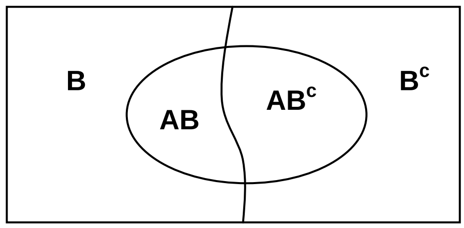
$P(A \cup B \mid C) = P(A \mid C) + P(B \mid C) - P(AB \mid C)$ when $P(C) > 0$ 임을 보이시오.

Additive Law in conditional PROB

2.9 베이즈 규칙(Bayes's Rule)

2.9.1 사건 분할(Event decomposition)

하나의 사건은 다른 사건의 합(union)과 곱(intersection)으로 분할될 수 있다. 다음은 사건 A가 사건 B에 의해 나누어지는 것을 보여주는 Venn Diagram이다. 사건 B는 표본공간 S를 2개의 영역으로 나누는 역할을 한다. 사건 A는 두 개의 곱(AB, AB^C)으로 disjoint 하게 나뉘므로 $A = AB + AB^C$ 으로 표현된다.



EXAMPLE 2-20 사건 분할

유권자의 40%는 여성, 60%는 남성이다. 여성 가운데 70%는 법안 A에 찬성하고 남성은 40%만 찬성한다. 유권자를 임의로 뽑았을 때 그 사람이 법안 A에 찬성할 확률?

EXAMPLE 2-21 사건 분할(2)

제품 A의 불량률은 p 라고 가정하자. 제품을 무작위 검사하였을 때 r-번째 검사에서 첫 번째 불량이 나올 확률을 계산하시오.

EXAMPLE 2-22 사건 분할(3)

레이더 3개가 설치된 지역이 있다. 레이더는 서로 독립적으로 작동하며 비행 물체를 인식하지 못할 확률은 0.02이다.

(1)만약 비행 물체가 그 지역에 들어왔다면, 레이더에 인식되지 않을 확률을 계산하시오.

(2)만약 비행 물체가 그 지역에 들어왔다면, 모든 레이더에 인식될 확률을 계산하시오.

HOMEWORK #3-5

두 개 주사위를 던져 합을 적는 실험을 생각하자. 합이 7이 나오기 전에 합이 3을 먼저 얻을 확률을 구하자.

HOMEWORK #3-6

거짓말 탐지기가 있다. 사람이 진실을 말하는데 거짓말을 하고 있다고 판단할 확률은 10%이고 거짓말을 말하는데 거짓말 하고 있다고 판단할 확률은 95%이다. 두 사람이 있는데 한 사람은 범죄자이고 한 사람은 무죄이다.

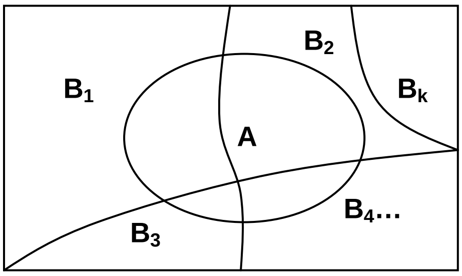
(1)거짓말 탐지기가 두 사람 모두 범죄자라 판단할 확률을 구하시오.

(2)거짓말 탐지기가 잘못 판단할 확률을 구하시오.

2.9.2 전확률 법칙(Law of total probability)

$S = \bigcup_{n=1}^{k} B_n$, $B_i B_j = \varnothing \text{ for } i \neq j$ 이고 $P(B_j) > 0$ 라 가정하자. 임의의 사건 A에 대하 다음이 성립한다. 이를 전확률 법칙이라 한다.

$$P(A) = \sum_{n=1}^{k} P(AB_n) = \sum_{n=1}^{k} P(B_n)P(A \mid B_n) \quad \text{(PROOF: obvious)}$$



2.9.3 베이지 규칙(Bayes's rule)

$S = \bigcup_{n=1}^{k} B_n$, $B_i B_j = \varnothing \text{ for } i \neq j$ 이고 $P(B_j) > 0$ 라 가정하면 다음이 성립한다.

$$P(B_j \mid A) = \frac{P(B_j)P(A \mid B_j)}{\sum_{n=1}^{k} P(B_n)P(A \mid B_n)} \quad \text{(PROOF: obvious)}$$

EXAMPLE 2-23 전확률 법칙

A 회사 종업원의 35%는 여자, 65%는 남자이다. 남자 종업원이 불량을 낼 확률은 8%. 여자는 5%이다. 이 회사의 불량률은 얼마인가? (tree diagram을 이용하자)

EXAMPLE 2-24 베이지 확률

주머니에 흰 구슬 5개, 빨간 구슬 6개가 있다. 구슬 2개를 뽑아 보지 않고 버린다. 세 번째 구슬이 백색일 확률을 구하시오.

EXAMPLE 2-25 베이지 확률(2)

여행 방법이 3가지 있다. 열차, 버스, 비행기. 여행자의 60%는 버스, 30%는 열차, 나머지 10%는 비행기를 이용한다. 버스 이용객 중 60%는 혼자 여행하는 반면 철도 여행객 50%, 비행기 여행객 90%는 혼자 여행한다. 여행자를 무작위 추출하였을 때

(1)그가 혼자 여행할 확률을 구하시오.

(2)혼자 여행할 때 기차를 이용할 확률을 구하시오.

HOMEWORK #4-1

10명이 사다리를 술래 1명을 뽑는다. 언제 사다리를 선택하면 술래가 될 가능성이 가장 낮은가?

HOMEWORK #4-2

조사에 의하면 서해안의 석유 매장 확률은 30%이다. 석유가 실제 매장되어 있다면 시추시 석유 발견 가능성은 70%이고 석유가 매장되어 있지 않다면 시추 시 석유 발견 가능성은 10%이다. 한 장소를 시추하였더니 석유가 나왔다. 그럼 실제 이 장소에 석유가 있을 확률을 구하시오.

2.10 확률변수(Random variable)

DEFINITION 확률변수(random variable) X 는 정의역(domain)이 표본공간인 실수함수이다. $X: S \rightarrow R$. 확률변수 X 의 공간은 실수 A=$\{x: x = X(w), w \in S\}$ 이다.

$P(X \in A) = P_X(A) = P(C)$, $C = \{w: w \in S \text{ and } X(w) \in A\}$ 은 확률(집합)함수이다.

EXAMPLE 2-24 베이지 확률

동전을 두 개 던지는 실험에서 확률변수 X 을 앞면의 수라 정의하자. X 의 확률집합함수?

EXAMPLE 2-24 베이지 확률

지름(diameter)이 4~4.5 사이인 원이 있다. 확률변수 X를 원의 면적이라 정의할 때 X의 확률집합함수를 구하시오. 그리고 원의 면적이 적어도 4.41π 일 확률을 구하시오.