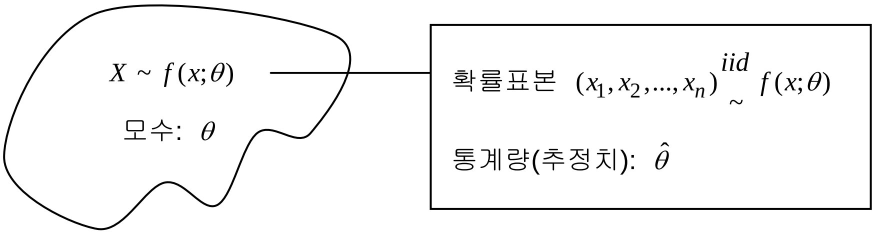

점 추정치: $\hat{\theta}$, 확률표본의 함수이므로 $\hat{\theta}$의 분포함수는 Sampling distribution이다. 우리는 앞에서 좋은 추정치가 갖추어야 할 성질로 불편성(unbiasedness): $E(\hat{\theta}) = \theta$ 과 최소 분산(variance)을 살펴보았다.

여기서는 점 추정치의 성질(좋은 추정치를 얻는 과정)과 좋은 추정치를 얻는 방법에 대해 논의한다. μ에 대한 좋은 추정치는? 당연히 $\overline{X}$ 이다. 왜 그런지 살펴볼 것이고 좋다는 것이 어떤 면에서 그런지 알아볼 것이다.

8.1 상대 효율(relative frequency)

3장에서 살펴 보았듯이(예제3.3, 페이지56) 모수 θ에 대한 불편 추정량은 무수히 많이 존재한다. 두 불편 추정량 $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ 을 생각해 보자. 만약 $V(\hat{\theta}_1) < V(\hat{\theta}_2)$ 라면 $\hat{\theta}_1$ 은 $\hat{\theta}_2$ 에 비해 효율적(efficient)하다고 정의하며 $V(\hat{\theta}_2)/V(\hat{\theta}_1)$ 을 두 추정량의 상대효율이라 한다.

$eff(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = \dfrac{V(\hat{\theta}_2)}{V(\hat{\theta}_1)}$ 추정량 $\hat{\theta}_2$에 대한 $\hat{\theta}_1$의 상대효율이라 한다.

$\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ 은 불편 추정량이므로 추정 분산($V(\hat{\theta})$)과 추정 평균자승오차($MSE(\hat{\theta})$)은 동일하므로 추정 분산이 적은 추정량이 (즉 효율적인 추정량) 좋은 추정량이다.

EXAMPLE 8.1

$(X_1, X_2, ..., X_n)$을 $Unifrom(0,\theta)$으로부터 확률표본이라 하자. 즉 $(X_1, X_2, ..., X_n) \sim iid U(0,\theta)$

두 개의 추정량을 생각해 보자. $\hat{\theta}_1 = 2\overline{X}$, $\hat{\theta}_2 = (\dfrac{n+1}{n})X_{(n)}$

$$E(\hat{\theta}_1) = \theta$$
$$V(\hat{\theta}_1) = \theta^2 / 3n$$
(why?)

이제 순서통계량(order statistic) $Y = X_{(n)}$의 확률밀도함수를 구해보자.

$g_{(n)}(y) = n[F_X(y)]^{n-1} f_x(y) = n(\frac{y}{\theta})^{n-1}(\frac{1}{\theta}), 0 < y < \theta$, y는 $X_{(n)}$임을 상기하기 바란다.

그러므로 $E(Y) = E(X_{(n)}) = \frac{n}{n+1}\theta$ 이므로 $E(\hat{\theta}_2) = \theta$ (불편 추정량)

복잡한 과정을 거치면($E(Y^2) = \frac{n}{n+1}\theta^2$), $V(Y) = [\frac{n}{n+2} - (\frac{n}{n+2})^2]\theta^2$ 이므로 $V(\hat{\theta}_2) = \frac{1}{n(n+2)}\theta^2$

그러므로 $eff(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = \frac{V(\hat{\theta}_2)}{V(\hat{\theta}_1)} = \frac{3}{n+2}$, $n > 1$ 이면 $\hat{\theta}_1$은 $\hat{\theta}_2$에 비해 상재적으로 효율적이다.

다음 절에서 우리는 불편추정량 중 최소 분산을 갖는 추정량 얻는 방법을 논의할 것이다.

EXAMPLE 8.2

$f(x) = \frac{1}{\theta}e^{-x/\theta}$으로부터 표본 크기 3인 확률표본 (X_1, X_2, X_3)을 얻었다. 모수 θ에 대한 추정량을 다음과 같이 생각해 보자. ① $\hat{\theta}_1 = X_1$ ② $\hat{\theta}_2 = (X_1 + X_2)/2$ ③ $\hat{\theta}_3 = \overline{X} = (X_1 + X_2 + X_3)/3$

⑴모두 불편 추정량인가?

⑵ $eff(\hat{\theta}_3, \hat{\theta}_1)$, $eff(\hat{\theta}_3, \hat{\theta}_2)$ 을 구하시오.

HOMEWORK #14-1 DUE 11월 16일

$(X_1, X_2, ..., X_n)$ 을 $Normal(\theta, \sigma^2)$ 으로부터 확률표본이라 하자. 모수(모집단 평균) θ 에 대한 추정량으로 다음을 생각했다. ① $\hat{\theta}_1 = (X_1 + X_2)/2$ ② $\hat{\theta}_2 = \overline{X} = (X_1 + X_2 + ... + X_n)/n$

⑴모두 불편 추정량인가?

⑵ $eff(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ 을 구하시오.

HOMEWORK #14-2 DUE 11월 16일

$(X_1, X_2, ..., X_n)$ 을 $Poisson(\theta = \lambda)$ 으로부터 확률표본이라 하자. 모수 θ 에 대한 추정량으로 다음을 생각했다. ① $\hat{\theta}_1 = (X_1 + X_2)/2$ ② $\hat{\theta}_2 = \overline{X} = (X_1 + X_2 + ... + X_n)/n$

⑴모두 불편 추정량인가?

⑵ $eff(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ 을 구하시오.

8.2 일치성 (consistency)

동전의 앞 면이 나오는 확률(이를 모수 $\theta = p$)을 알아보기 위하여 동전을 던지는 실험을 생각해 보자. n 번 동전 을 던졌을 때 앞 면이 나오는 회수를 Y 라 하자. 그러면 앞 면에 대한 추정량으로 $\hat{p} = Y/n$ 을 생각할 수 있다. n 이 적으면 $\theta = p$ 에 가까운 값을 얻지 못하겠지만 무한히 많이 던진다면 $\theta = p$ 에 근사할 것이다. 이를 확률로 나타내면 다음과 같다.

매우 작은 임의의 양의 실수 ε 에 대해 $P(|\frac{Y}{n} - p| \le \varepsilon)$ 의 확률은 1에 가까워질 것이다.

DEFINITION (일치성)

매우 작은 임의의 양의 실수 ε 에 대해 다음 조건을 만족하는 추정량 $\hat{\theta}_n$ 을 모수 θ 에 대한 일치 추정량(consistent estimator)이라 한다. $\lim_{n \to \infty} P(|\hat{\theta}_n - \theta| \le \varepsilon) = 1$

$\hat{\theta}_n$ 의 n 은 표본 크기를 의미한다.

THEOREM

만약 $\lim_{n\to\infty} V(\hat{\theta}_n)=0$ 을 만족하는 **불편** 추정량 $\hat{\theta}_n$ 는 일치 추정량이다.

PROOF

By Tchebysheff's Inequality($P(|Y-\mu|>k\sigma)\le \frac{1}{k^2}$) $P(|\hat{\theta}_n-\theta|>k\sigma_{\hat{\theta}_n})\le \frac{1}{k^2}$

$k=\frac{\varepsilon}{\sigma_{\hat{\theta}_n}}$ 이라 놓으면 $P(|\hat{\theta}_n-\theta|>\varepsilon)\le \frac{V(\hat{\theta}_n)}{\varepsilon^2}$ 이다.

그러므로 양변에 $\lim_{n\to\infty}$ 을 취하면 $\lim_{n\to\infty} P(|\hat{\theta}_n-\theta|>\varepsilon)\le 0$

그러므로 $\lim_{n\to\infty} P(|\hat{\theta}_n-\theta|\le\varepsilon)=1$ 이다. Q.E.D.

EXAMPLE 8.3

$(X_1, X_2,\ldots, X_n)$ 을 $???(\theta,\sigma^2)$ 으로부터 확률표본이라 하자. 모수 θ 에 대한 추정량으로 표본평균 $\overline{X}$ 을 생각해 보자. 즉 $\hat{\theta}_n=\overline{X}_n$. 이것이 일치 추정량임을 보이시오.

$\overline{X}_n$ 은 μ 의 불편 추정량이고 $V(\overline{X}_n)=\frac{\sigma^2}{n}$ 에 의해 $\lim_{n\to\infty} V(\hat{\theta}_n)=0$ 성립하므로 일치 추정량이다.

표본평균 $\overline{X}$ 가 모집단 평균 μ 에 대한 일치 추정량이라는 것을 달리 표현한 것이 **대수의 법칙(law of large number)**이다.

$\lim_{n\to\infty} P(|\overline{X}_n-\mu|\le\varepsilon)=1$ $\overline{X}_n$ converges in probability to μ

THEOREM

$\hat{\theta}_n$ 은 θ 의 일치 추정량(다시 표현하면 θ_n converges in probability to θ 혹은 $\hat{\theta} \underset{in\ prob.}{\rightarrow} \theta$)이고 $\hat{\theta}'_n$ 은 θ' 의 일치 추정량이라 하면 다음이 성립한다.

⑴ $(\hat{\theta}_n + \hat{\theta}'_n)$ 은 $(\theta + \theta')$ 의 일치 추정량이다.

⑵ $\hat{\theta}_n \hat{\theta}'_n$ 은 $\theta\theta'$ 의 일치 추정량이다.

⑶ $(\hat{\theta}_n / \hat{\theta}'_n)$ 은 θ / θ' 의 일치 추정량이다. 단 $\theta' \neq 0$.

⑷ 만약 $g(.)$ 가 θ 의 실수 함수이면 $g(\hat{\theta}_n)$ 은 $g(\theta)$ 의 일치 추정량이다.

EXAMPLE 8.4

$(X_1, X_2, ..., X_n)$ 은 $E(X_i) = \mu, E(X_i^2) = \mu'_2, E(X_i^4) = \mu'_4$ 인 모집단으로부터 확률표본이라 하자.

$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ 이 모집단 분산 $\sigma^2 = V(X_i)$ 에 대한 일치 추정량임을 보이시오.

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\bar{X}^2) = \frac{n}{n-1}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \bar{X}^2)$$

$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ 은 평균 $E(X_i^2) = \mu'_2$, 분산 $V(X_i^2) = \mu'_4 - (\mu'_4)^2$ 인 모집단으로부터 확률표본 평균이다.

평균은 모집단 평균에 대한 일치 추정량이므로 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ 는 μ'_2 의 일치 추정량이다.

위의 정리에 의해 $\bar{X}^2$ 은 μ^2 의 일치 추정량이다.

그러므로 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \bar{X}^2$ 은 σ^2 일치 추정량이다. 또한 $\lim_{n \to \infty} \frac{n}{n-1} = 1$ 이므로

S^2 은 σ^2 의 일치 추정량이다. $\boxed{Q.E.D}$

그런데 S^2 은 σ^2 의 불편 추정량인가?

모집단 평균 μ 에 대표본 $100(1-\alpha)\%$ 신뢰구간은 $\bar{X} \pm z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 이다. 만약 σ 을 모른다면 어떻게 할까? μ 에 대한 소표본 신뢰구간에는 σ 가 없으니 문제 없지만…

Slutsky's THEOREM

n 이 무한히 커지면 U_n 의 확률분포함수가 **표준**정규분포에 근사한다고 가정하자. 만약 W_n 이 확률적으로 1에 근사한다면(converge in probability) U_n / W_n 도 **표준**정규분포를 따른다.

EXAMPLE 8.5

대표본의 경우 $\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$ 이 표준정규분포에 근사함을 보이시오.

$(X_1, X_2, ..., X_n)$ 을 평균 μ, 분산 σ^2 인 모집단으로부터 확률표본이라 하자. 만약 n 이 충분히 크다면 $\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ 이 표준정규분포를 따른다. Why?

그리고 $\dfrac{S^2}{\sigma^2} \to 1$ 이므로 Slutsky's Theorem $\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$ 이 표준정규분포를 따른다.

모집단 평균 μ 에 대한 $100(1-\alpha)\%$ 신뢰구간은 $\bar{X} \pm z_{\alpha/2} \dfrac{S}{\sqrt{n}}$ 이다.

같은 이유로 모집단 비율 p 에 대한 $100(1-\alpha)\%$ 신뢰구간은 $\hat{p} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$ 이다. Q.E.D.

모집단이 정규분포를 따르면 소표본이더라도 $\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$ 이 성립한다. 이 경우 표본 크기 n 이 커지면 위의 예제에 의해 $\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$ 는 정규분포에 근사한다. 그러므로 $t(n) \to Normal(0,1)$

EXAMPLE 8.6

모집단 $f(x;\theta) = \theta x^{\theta-1}, 0 < x < 1$ 으로부터 확률표본 $(X_1, X_2, ..., X_n)$ 을 생각하자. 표본평균 $\bar{X}$ 가 $\theta/(\theta+1)$ 의 일치 추정량임을 보이시오.

$$E(\bar{X}_n) = E(X) = \int_0^1 x f(x)dx = \frac{\theta}{\theta+1}.$$

$V(\bar{X}_n) = \dfrac{1}{n}[E(X^2) - [\dfrac{\theta}{\theta+1}]^2]$ 그러므로 $\lim_{n\to\infty} V(\bar{X}_n) = 0$ 페이지75 정리에 의하여…

HOMEWORK #14-3 DUE 11월 16일

$(X_1, X_2, ..., X_n)$ 을 $f(x;\theta) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}, 0 < x$ 으로부터 확률표본이라 하자. $\overline{X} = (X_1 + X_2 + ... + X_n)/n$ 가 모수 θ에 대한 일치 추정량임을 보이시오.

HOMEWORK #14-4 DUE 11월 16일

$(X_1, X_2, ..., X_n)$ 을 $f(x;\theta) = \theta e^{-\theta x}, 0 < x$ 으로부터 확률표본이라 하자. $\frac{1}{\overline{X}}$ 가 모수 θ 에 대한 일치 추정량임을 보이시오.

HOMEWORK #14-5 DUE 11월 16일

$(X_1, X_2, ..., X_n)$ 을 $Uniform(\theta, \theta+1)$ 으로부터 확률표본이라 하자.

(1) $\hat{\theta} = \overline{X} - 1/2$ 이 불편 추정량임을 보이시오.

(2) $\hat{\theta} = \overline{X} - 1/2$ 가 일치 추정량임을 보이시오.

8.3 Sufficiency

지금까지 $\mu, p, (\mu_1 - \mu_2), (p_1 - p_2), \sigma^2$ 은 추정치로는 $\overline{X}, \hat{p}, (\overline{X}_1 - \overline{X}_2), (\hat{p}_1 - \hat{p}_2), S^2$ 을 생각했고(직감적으로) 이것이 좋은 추정치임을 보였다. 불편성($E(\hat{\theta}) = \theta$), 일치성($\hat{\theta}_n \to \theta$)을 가짐을 보였다. 그리고 다른 추정치에 비해 분산이 낮음을 보였다. 아직 최소 분산을 가지는 추정량임을 보이지 않았다.

여기서는 좋은 추정량의 성질 중 하나인 충분성(sufficiency)에 대해 논의하겠다. 충분성을 갖는 충분 통계량은 불편 추정량 중 최소 분산을 갖는 BEST 추정량을 찾는데 사용된다.

충분성? 크기 n 인 확률표본으로부터 얻은 추정량이 모수에 대한 정보를 모두 가짐. 그러므로 모수에 대해서는 충분 통계량 값만 알고 있다면 더 이상의 정보는 필요 없음을 의미한다. 그럼 이것을 어떻게 수식으로 표현할 것인가? 다음 예제를 살펴보자.

EXAMPLE 8.7

$(X_1, X_2, ...X_n)$ 을 $Bernoulli(p)$ 으로부터 확률표본이라 하자. 모수 p 에 대한 추정량 $\hat{p} = \sum X_i / n$ 가 사용된다.

우선 $Y = \sum X_i \sim Binomial(n, p)$ 을 생각해보자. 추정량 Y 는 충분 통계량? 만약 Y 의 값을 알고 있다면 더 이상 모수 p 에 대한 정보를 얻기 위하여 $(X_1, X_2, ...X_n)$ 을 살펴볼 필요가 없다는 것을 의미한다. 이를 수식으로 표현한다면? 통계량이 주어졌을 때 $(X_1, X_2, ...X_n)$ 조건부 확률분포함수를 생각해보자.

$$P(X_1, X_2, ..., X_n \mid Y = y) = \frac{P(X_1, X_2, ..., X_n, Y = y)}{P(Y = y)} = \frac{p^y q^{n-y}}{\binom{n}{y} p^y q^{n-y}} = \frac{1}{\binom{n}{y}}$$

조건부 확률분포함수에는 더 이상 모수 p 에 의존하지 않는다. 통계량 Y 값이 주어진다면 $(X_1, X_2, ...X_n)$ 에는 더 이상 모수 p 에 대한 정보는 없다. 통계량 Y 는 충분 통계량이다.

DEFINITION (충분성)

$(X_1, X_2, ...X_n)$ 을 모수 θ 모집단으로부터 확률표본이라 하자. 만약 통계량 $U = g(X_1, X_2, ...X_n)$ 가 주어졌을 때 $(X_1, X_2, ...X_n)$ 의 조건부 확률분포함수가 모수 θ 에 의존하지 않는다면 통계량 U 는 충분 통계량이다.

DIFINITION (Likelihood function 우도 함수)

확률표본 $(X_1, X_2, ... X_n)$ 의 결합확률분포함수를 모수 θ 을 고려하여 나타낸 함수를 우도 함수라 한다.

$$L(x_1, x_2, ..., x_n; \theta) = p(x_1;\theta)p(x_2;\theta)....p(x_n;\theta)(\text{이산})$$
$$= f(x_1;\theta)f(x_2;\theta)....f(x_n;\theta)(\text{연속})$$

THEOREM (Factorization criterion)

확률표본 $(X_1, X_2, ... X_n)$ 으로부터의 통계량 U 는 충분 통계량 iif(if only if 필요충분 조건) 우도 함수가 다음과 같이 두 개의 비음수(non-negative) 함수의 곱으로 표현된다.

$L(x_1, x_2, ..., x_n; \theta) = g(u;\theta)h(x_1, x_2, ..., x_n)$ [증명 생략]

EXAMPLE 8.8

$(X_1, X_2, ... X_n)$ 을 $f(x;\theta) = \frac{1}{\theta}e^{-x/\theta}, 0 < x$ 으로부터 확률표본이라 하자. 표본평균 $\overline{X}$ 가 충분 통계량임을 보이시오.

우도 함수(likelihood function)은 다음과 같다.

$$L(x_1, x_2, ..., x_n; \theta) = f(x_1;\theta)f(x_2;\theta)....f(x_n;\theta) = \frac{1}{\theta^n}e^{-n\bar{x}/\theta}, g(\bar{x};\theta) = \frac{1}{\theta^n}e^{-n\bar{x}/\theta}, \quad h(x_1, x_2, ..., x_n) = 1$$

위의 Factorization criterion에 의해 표본 평균 $\overline{X}$ 은 충분 통계량이다.

그럼 표본 합 $\sum X_i$ 는 충분 통계량인가?

이처럼 충분 통계량은 여러 개이다. 이전 페이지 예를 살펴 보자.

$L(x_1, x_2, ..., x_n; \theta) = p(x_1;\theta)p(x_2;\theta)...p(x_n;\theta) = p^{\sum x_i}q^{n-\sum x_i}$ 이므로 $\sum X_i$ 는 충분 통계량이다. 그럼 표본 비율 $\sum X_i / n$ 도 충분 통계량이다.

충분 통계량의 one-to-one 함수는 또한 충분 통계량이다. (예) $\sum X_i$, $\sum X_i / n$

Factorization criterion에 의해 충분 통계량은 무수히 많이 존재함을 알 수 있다. 그리고 충분 통계량은 데이터(확률표본)의 모수에 대한 정보의 최고 좋은 요약 값이다.

HOMEWORK #15-1

$(X_1, X_2,...X_n)$ 을 $Poisson(\theta = \lambda)$ 으로부터 확률표본이라 하자. 통계량 $\sum X_i$ 가 충분 통계량임을 보이시오.

HOMEWORK #15-2

$(X_1, X_2,...X_n)$ 을 $Geometric(\theta = p)$ 으로부터 확률표본이라 하자. 표본평균 $\sum X_i$ 가 충분 통계량임을 보이시오.

HOMEWORK #15-3

$(X_1, X_2,...X_n)$ 을 $Normal(\mu, \sigma^2)$ 으로부터 확률표본이라 하자.

(1)만약 σ^2 을 알고 있다면, 표본 합 $\sum X_i$ 이 μ 에 대한 충분 통계량임을 보이시오.

(2)만약 μ 을 알고 있다면, $\sum (X_i - \mu)^2$ 이 σ^2 에 대한 충분 통계량임을 보이시오.

EXAMPLE 8.9

$(X_1, X_2,...X_n)$ 을 $f(x;\theta) = \frac{1}{\theta}, 0 < x < \theta$ 으로부터 확률표본이라 하자.

순서 통계량 $X_{(n)} = \max(x_1, x_2,...x_n)$ 가 충분 통계량임을 보이시오.

확률변수 영역이 모수에 의존하므로 지시 함수(indicator function)를 이용하여 확률분포함수를 나타내 보자. 만약 $x \in A$ 이면 $1_A(x) = 1$ 이고 $x \notin A$ 이면 $1_A(x) = 0$ 이라 하자. $f(x;\theta) = \frac{1}{\theta} 1_{(0,\theta)}(x)$

우도 함수 $L(x_1, x_2,...., x_n;\theta) = (\frac{1}{\theta})^n 1_{(0,\theta)}(x_{(n)})$, $g(x_{(n)};\theta) = \frac{1}{\theta^n} 1_{(0,\theta)}(x_{(n)})$, $h(x_1, x_2,...., x_n) = 1$

그러므로 순서통계량 $X_{(n)}$ 은 충분통계량이다.

HOMEWORK #15-4

$(X_1, X_2, ..., X_n)$ 을 $f(x;\theta) = e^{-(x-\theta)}, x \ge \theta$ 으로부터 확률표본이라 하자.

순서 통계량 $X_{(1)} = \min(x_1, x_2, ..., x_n)$ 가 충분 통계량임을 보이시오.

8.4 Rao-Blackwell 정리 및 MVUE (최소분산 불편 추정량)

충분 통계량은 모수에 대한 좋은 추정량을 발견하는데 주요 역할을 한다. $\hat{\theta}$ 을 모수 θ 의 불편 추정량, 통계량 U 을 모수 θ 에 대한 충분 통계량이라 하자. 불편 추정량인 충분 통계량 함수는 불편 추정량 중 최소 분산을 갖는다.

만약 최소 분산을 갖는 불편 추정량을 찾는 것은 충분 통계량의 함수인 추정량에 한정하며 된다. 이에 관련된 이론이 Rao-Blackwell 정리라 한다.

THEOREM (Rao-Blackwell 정리)

추정량 $\hat{\theta}$ 는 모수 θ 의 불편 추정량이고 추정 분산을 $V(\hat{\theta})$ 이라 하자. 만약 통계량 U 을 모수 θ 에 대한 충분 통계량이라 하면 $\hat{\theta}^* = E(\hat{\theta} \mid U)$ 는 불편 추정량이고 최소 분산을 갖는다.

PROOF

$$E(\hat{\theta}^*) = E(E(\hat{\theta} \mid U)) = \theta$$

$$V(\hat{\theta}) = V(E(\hat{\theta} \mid U)) + E(V(\hat{\theta}) \mid U) \le V(\hat{\theta}^*)$$ (왜냐하면 분산 $V(\hat{\theta}) \mid U) \ge 0$ 이므로 $E(V(\hat{\theta}) \mid U) \ge 0$)

R-B 정리는 최소분산을 갖는 불편 추정량은 충분 통계량으로 만들어질 수 있다. 만약 우리가 불편 추정량을 갖고 있다면 R-B 정리를 이용하여 이 불편 추정량을 향상 시킬 수 있다. 이렇게 얻는 추정량에 R-B 정리를 반복 적용하면 된다.

그러나 만약 동일한 충분 통계량을 사용한다면 더 이상 나아지는 것도 없다. $\hat{\theta}^* = E(\hat{\theta} \mid U)$ 을 새로 얻은 불편 추정량이라 하자. $E(\hat{\theta}^* \mid U) = \hat{\theta}^*$ 이므로 같게 된다.

충분 통계량은 많다. 그럼 어떤 충분 통계량을 시작점으로 하여 R-B 정리에 사용될까? Factorization criterion이 가장 좋은 충분 통계량을 얻게 한다. 가장 좋은 통계량이란 데이터(확률표본)에 있는 모수에 대한 정보를 가장 잘(best) 요약한 것을 의미하며 이를 Minimal 충분 통계량이라 한다.

$\boxed{\text{Lehmann and Scheffé 정리}}$

$\dfrac{L(y_1, y_2, ..., y_n; \theta)}{L(x_1, x_2, ..., x_n; \theta)}$은 모수 θ에 의존하지 않는다. iif $g(y_1, y_2, ..., y_n) = g(x_1, x_2, ..., x_n)$. 함수 g을 발견할 수 있을 수 있다면 이를 모수 θ의 Minimal 충분 통계량이다.

일반적으로 Factorization criterion에서 얻은 충분 통계량과 Minimal 충분 통계량은 같다. 이런 통계량이 갖는 성질을 Completeness(완비성)라 한다.

모수 θ에 대한 불편 추정량 $\hat{\theta}$와 Factorization criterion의 충분 통계량 U을 가지고 출발하여 R-B 정리를 적용하면 최소분산 불편 추정량(MVUE: Minimum Variance Unbiased Estimator)을 얻게 된다. ⑴Factorization에 의해 충분 통계량 U을 구하고 ⑵U의 함수로 된 불편 추정량을 얻으면 이것이 R-B 정리에 의하여 MVUE가 된다.

EXAMPLE 8.10

$(X_1, X_2, ... X_n)$ 을 $Bernoulli(p)$ 으로부터 확률표본이라 하자. Factorization criterion에 의해 (minimal)충분 통계량을 구하시오. 이것으로부터 모수 p의 MVUE을 얻을 수 있다.

우도 함수 $L(x_1, x_2, ..., x_n; \theta) = p(x_1; \theta) p(x_2; \theta) .... p(x_n; \theta) = p^{\sum x_i} (1-p)^{n - \sum x_i}$,

$g(\sum x_i; \theta = p) = p^{\sum x_i} (1-p)^{n - \sum x_i}$, $h(x_1, x_2, ..., x_n) = 1$

Factorization criterion에 의해 $U = \sum X_i$ 는 충분 통계량이다.

한편 $E(U) = np$ 이므로 $\dfrac{U}{n} = \dfrac{\sum X_i}{n}$ 은 불편 추정량이다.

$\hat{p} = \dfrac{U}{n}$ 는 충분 통계량의 함수이고 불편 추정량이므로 R-B 정리에 의해 MVUE이다.

EXAMPLE 8.11

$(X_1, X_2, ... X_n)$ 을 $Weibull(\gamma = 2, \theta)$, $f(x; \theta) = (\dfrac{2x}{\theta}) e^{-x^2/\theta}, x > 0$ 으로부터 확률표본이라 하자. 모수 θ의 MVUE을 얻으시오.

우도 함수 $L(x_1, x_2, ..., x_n; \theta) = f(x_1; \theta) f(x_2; \theta) .... f(x_n; \theta) = (\frac{2}{\theta})^n e^{-\sum x_i^2/\theta} \times (x_1 \times x_2 \times ... \times x_n)$,

$$g(\sum x_i; \theta) = (\frac{2}{\theta})^n e^{-\sum x_i^2/\theta}, \quad h(x_1, x_2, ..., x_n) = (x_1 \times x_2 \times ... \times x_n)$$

Factorization criterion에 의해 $U = \sum X_i^2$ 는 충분 통계량이다.

이제 우리는 모수 θ에 대한 불편 추정량을 구해야 한다. $W = X^2$이라 하자.

변환 방법(Method of Transformation): $X = \sqrt{W}, \frac{dx}{dw} = \frac{1}{2\sqrt{w}}$

$$f_W(w) = f_X(\sqrt{w})(\frac{1}{2\sqrt{w}}) = \frac{1}{\theta} e^{-w/\theta} \sim \exp(\theta)$$

그러므로 $E(W) = \theta$ 이다. $E(X^2) = \theta$. 그러므로 $E(\sum X_i^2) = n\theta$. 즉 $E(\sum X_i^2 / n) = \theta$

$\sum X_i^2 / n$ 는 모수 θ에 대한 불편 추정량이고 충분 통계량 $U = \sum X_i^2$ 의 함수이므로 R-B 정리에 의해 $\sum X_i^2 / n$은 모수 θ에 대한 MVUE이다.

EXAMPLE 8.12 (two parameter case)

$(X_1, X_2, ...X_n)$ 을 $Normal(\mu, \sigma^2)$ 으로부터 확률표본이라 하자. 모수 (μ, σ^2)에 대한 MVUE을 구하시오.

우도 함수
$$L(x_1, x_2, ..., x_n; \theta) = f(x_1; \theta) f(x_2; \theta) .... f(x_n; \theta) = (\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma})^n \exp(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum (x_i - \mu)^2)$$
$$= (\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma})^n \exp\{-\frac{n\mu^2}{\sigma^2}\} \exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\sum x_i^2 - 2\mu \sum x_i)\}$$
,

Factorization criterion에 의해 $(\sum X_i, \sum X_i^2)$는 (μ, σ^2)에 대한 joint 충분 통계량이다.

우리는 모수 μ, σ^2에 대한 불편 추정량은 각각 $\overline{X}, S^2$ 이다.

$\overline{X}, S^2$ 는 모수 μ, σ^2에 대한 불편 추정량이고 충분 통계량 $(\sum X_i, \sum X_i^2)$의 함수이므로 R-B 정리에 의해 MVUE이다.

HOMEWORK #16-1

$(X_1, X_2, ... X_n)$ 을 $Exp(\theta),\ f(x;\theta)=\frac{1}{\theta}e^{-x/\theta}, x>0$ 으로부터 확률표본이라 하자. 모수 θ 에 대한 MVUE을 얻으시오.

HOMEWORK #16-2

$(X_1, X_2, ... X_n)$ 을 $Poisson(\lambda=\theta)$ 으로부터 확률표본이라 하자. 모수 θ 에 대한 MVUE을 얻으시오.

EXAMPLE 8.13 (function of parameter)

$(X_1, X_2, ... X_n)$ 을 $\exp(\theta),\ f(x;\theta)=\frac{1}{\theta}e^{-x/\theta}, x>0$ 으로부터 확률표본이라 하자. $V(X)$ 의 MVUE을 얻으시오.

$E(X_i)=\theta, V(X_i)=\theta^2$ 이다. HOMEWORK16-1에 의해 $\sum_{i=1}^{n} X_i$ 는 θ 에 대한 충분통계량임을 알고 있다.

$$E(\overline{X}^2)=V(\overline{X})+[E(\overline{X})]^2=\frac{\theta^2}{n}+\theta^2=(\frac{n+1}{n})\theta^2$$

이로부터 $(\frac{n}{n+1})\overline{X}^2$ 은 $V(X)=\theta^2$ 의 불편 추정량이고 충분 통계량 $\sum_{i=1}^{n} X_i$ 의 함수이므로 R-B 정리에 의해 MVUE이다.

EXAMPLE 8.14 (신뢰구간에 응용)

모집단이 $Weibull(\gamma=2,\theta),\ f(x;\theta)=(\frac{2x}{\theta})e^{-x^2/\theta}, x>0$ 따른다고 하자. 이로부터 확률표본 (0.637, 1.531, 0.733, 2.256, 2.364, 1,601, 0.152, 1.826, 1.868, 1.126)을 얻었다. 모수 θ 에 대한 95% 신뢰구간(confidence interval)을 얻으시오.

EXAMPLE 8.11의 결과로부터 $\sum X_i^2 / n$ 은 모수 θ에 대한 MVUE이다.

우리는 앞에서 $W = X^2 \sim \exp(\theta)$ 임을 알았다. 신뢰구간을 구하기 위하여 pivotal 통계량을 생각해 보자.

$\frac{2X_i^2}{\theta} \sim \chi^2(df = 2)$ (MGF 방법: 증명해 보라) 그러므로 $\sum_{i=1}^{10} \frac{2X_i^2}{\theta} \sim \chi^2(df = 20)$ (additivity)

$$P(a \le \frac{2}{\theta}\sum_{i=1}^{10} X_i^2 \le b) = 0.95 \rightarrow P(\frac{2\sum_{i=1}^{10} X_i^2}{b} \le \theta \le \frac{2\sum_{i=1}^{10} X_i^2}{a}) = 0.95 \rightarrow (1.442, 5.139)$$

$\chi^2(df = 20, \alpha/2 = 0.025)$ 표로부터 $a = 9.591, b = 34.17$ 이고 데이터로부터 $\sum X_i^2 = 24.643$

HOMEWORK #16-3

$(X_1, X_2, ... X_n)$ 을 $Normal(\mu, \sigma^2)$ 으로부터 확률표본이라 하자.

(1)만약 σ^2 을 알고 있다면, 표본평균 $\overline{X}$ 이 모수 μ 에 대한 MVUE임을 보이시오.

(2)만약 μ 을 알고 있다면, $s^2 = \sum (X_i - \mu)^2 / n$ 이 모수 σ^2 에 대한 MVUE임을 보이시오.

HOMEWORK #16-4

$(X_1, X_2, ... X_n)$ 을 $f(x;\theta) = \frac{1}{\theta}, 0 < x < \theta$ 으로부터 확률표본이라 하자.

순서 통계량 $X_{(n)} = \max(x_1, x_2, ... x_n)$ 을 이용하여 모수 θ에 대한 MVUE임을 구하시오.

HOMEWORK #16-5

확률표본 $(X_1, X_2, ... X_n)$ 은 $N(\mu_1, \sigma^2)$, 확률표본 $(Y_1, Y_2, ... Y_n)$ 은 $N(\mu_2, \sigma^2)$ 을 따르고 서로 독립이다. 만약 σ^2 을 알고 있다면, 모수 $(\mu_1 - \mu_2)$ 에 대한 MVUE을 얻으시오.

8.5 The method of Moments

이번 절부터는 모수 θ 에 대한 점 추정치를 구하는 방법을 소개하고자 한다. 가장 오랜 방법 중 하나가 적률(method of moment) 방법은 이번 절에서 좀 더 세련된 방법인 최대 우도 추정량(Maximum Likelihood estimator) 방법은 다음 절에서 논의하기로 한다.

적률 방법은 매우 간단하다.

$(X_1, X_2, \ldots X_n)$ 을 모집단 $f(x;\theta)$ 으로부터 확률표본이라 하자.

모집단의 k 차 적률은 $\mu_k' = E(X^k)$ 이고 표본의 k 차 적률은 $m_k' = \frac{1}{n}\sum X_i^k$ 이다.

적률 방법

$\mu_k' = m_k'$ 이라 놓고 풀면 모수에 대한 점 추정량을 얻게 된다. 모수가 한 개 이상이면 적률에 의한 방정식을 모수의 수만큼 얻어 사용하면 된다.

EXAMPLE 8.15

$(X_1, X_2, \ldots X_n)$ 을 $Uniform(0,\theta)$ 으로부터 확률표본이라 하자. 모수 θ 에 대한 점 추정량을 적률 방법에 의해 구하시오.

모집단 평균(1차 적률): $\mu_1' = E(X^1) = \frac{\theta}{2}$, 표본 평균(1차 적률): $m_1' = \frac{1}{n}\sum X_i^1 = \overline{X}$

그러므로 $\hat{\theta}/2 = \overline{X}$ 로부터 $\hat{\theta} = 2\overline{X}$ 점 추정량을 얻는다. $\hat{\theta} = 2\overline{X}$ 은 불편 추정량(?)이다.

EXAMPLE 8.16

$(X_1, X_2, \ldots X_n)$ 을 $Uniform(0,\theta)$ 으로부터 확률표본이라 하자. 적률에 의한 추정량 $\hat{\theta} = 2\overline{X}$ 가 일치 추정량임을 보이시오.

불편 추정량이고 $\lim_{n\to\infty} V(\hat{\theta}) = \lim_{n\to\infty} V(2\overline{X}_n) = 0$ 이므로 페이지 75의 정리에 의해 일치 추정량이다.

EXAMPLE 8.16 예제에서 적률에 의해 얻은 추정량은 일치 추정량임을 보였다. 이는 적률에 의해 얻은 표본 평균은 모집단 평균의 일치 추정량임을 알았다. (페이지 75, 대수의 법칙) 그러

므로 적률 방법으로 얻는 점 추정치는 일치 추정량임을 알 수 있다. (일치성)

그렇다고 적률에 의해 얻은 추정량이 꼭 MVUE인 것은 아니다. EXAMPLE 8.15에서 모수 θ에 대한 MVUE는 순서 통계량 $X_{(n)}$ 임을 알았다. (HOMEWORK #16-1)

그럼 적률에 의한 추정량은 불편 추정량인가? 그럴 수도 있고 아닐 수도 있다. 모수가 평균이라면 적률에 의한 추정량은 불편 추정량일 것이다. 그러나 다음 예제를 보자.

EXAMPLE 8.17

$(X_1, X_2, ... X_n)$ 을 $Gamma(\alpha, \beta)$ 으로부터 확률표본이라 하자. 모수 (α, β) 에 대한 점 추정량을 적률 방법에 의해 구하시오.

모집단 적률: $\mu_1' = E(X) = \alpha\beta$, $\mu_2' = E(X^2) = V(X) + [E(X)]^2 = \alpha\beta^2 + (\alpha\beta)^2$

표본 적률: $m_1' = \frac{1}{n}\sum X_i^1 = \overline{X}$, $m_2' = \frac{1}{n}\sum X_i^2$

방정식: $\mu_1' = m_1'$, $\mu_2' = m_2'$

$$\hat{\alpha} = \frac{\overline{X}^2}{(\sum X_i^2 / n) - \overline{X}^2} = \frac{n\overline{X}^2}{\sum (X_i - \overline{X})^2}, \hat{\beta} = \frac{\sum (X_i - \overline{X})^2}{n\overline{X}} \quad \text{---(1)}$$

불편 추정량은 아니다.(증명하기 다소 복잡하지만) $\overline{X}$ 는 $\alpha\beta$ 의 일치 추정량이고, $\frac{1}{n}\sum X_i^2$ 은 $\alpha\beta^2 + (\alpha\beta)^2$ 의 일치 추정량이다. 그러므로 식 (1)에 각각을 대입하면 $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ 는 각각 α, β 의 일치 추정량이다.

한편 Factorization criterion에 의해 $\sum X_i$ 와 $\prod X_i$ 가 충분 통계량이다. 적률에 의해 구한 추정량 (1)을 보면 충분 통계량의 함수가 아니다. 그러므로 MVUE가 아니다.

적률에 의해 구한 추정량은 일치 추정량이기는 하지만 불편성 보장은 물론 MVUE라는 보장이 없다. 쉽게 얻을 수 있다는 장점으로 인하여 추정량을 이해하기 위하여 시작점이 된다.

HOMEWORK #16-6

$(X_1, X_2, ... X_n)$ 은 $Poisson(\lambda)$ 으로부터의 확률표본이다. 적률방법에 의해 모수 λ 의 점 추정량을 구하시오.

HOMEWORK #16-7

$(X_1, X_2, ... X_n)$ 은 $Normal(\mu, \sigma^2)$ 으로부터의 확률표본이다. 적률방법에 의해 모수 (μ, σ^2) 의 점 추정량을 구하시오.

HOMEWORK #16-8

$(X_1, X_2, ... X_n)$ 은 $Uniform(0, 3\theta)$ 으로부터의 확률표본이다. 적률방법에 의해 모수 θ 의 점 추정량을 구하시오.

8.6 Method of Maximum Likelihood

MVUE를 구하기 위하여 ⑴Factorial criterion에 의해 충분 통계량을 구하고 ⑵충분 통계량의 함수이면서 불편성을 갖는 추정량을 구하면 R-B 정리에 의해 이것이 MVUE이다. 그러나 불편 추정량을 구하는 것이 그렇게 쉽지 만은 않다. (miss or hit)

한편, 적률에 의한 추정량은 일치성은 보장하지만 불편성, MVUE는 아닐 가능성이 높다. 이제 MVUE일 가능성이 높은 추정 방법을 소개하고자 한다. 추출된(수집된) 확률표본(데이터)이 어떤 모수 값일 경우 그 값들이 추정될 가능성이 가장 높은가? 이를 최대 우도 추정량이라 한다.

주머니 속에 공이 3개 들어 있다. 공의 색깔은 하양, 파랑일 수 있다. 그러나 각 몇 개씩 들어 있는지는 모른다고 가정하자. 2개의 공을 뽑아 색을 보고 주머니에 있는 공의 색을 맞춘다고 하자. 공 2개를 뽑았더니 파랑이었다. 그럼? 주머니의 공은?

하얀 공일 확률: 1/3($\binom{2}{2}\binom{1}{0}/\binom{3}{2}$), 파란 공일 확률: 1($\binom{3}{2}/\binom{3}{2}$)

파랑 공이 가능성이 높다. 이렇게 모수에 대한 추정량을 구하게 된다.

Maximum Likelihood Estimator

우도 함수 $L(x_1, x_2,..., x_n; \theta_1, \theta_2,..., \theta_k)$ 을 최대화 하는 모수 값을 추정하면 $(\theta_1, \theta_2,..., \theta_k)$ 의 최대 우도 추정량이다.

EXAMPLE 8.18

$(X_1, X_2,...X_n)$ 을 $Bernoulli(p)$ 으로부터 확률표본이라 하자. 모수 p 에 대한 MLE을 구하시오.

우도 함수: $L(x_1, x_2,..., x_n; p) = \prod f(x_i; p) = \prod p^{x_i}(1-p)^{1-x_i} = p^{\sum x_i}(1-p)^{n-\sum x_i}$

우도 함수를 최대화 하는 모수 값을 구한다? p 에 대해 미분하고 그것을 0으로 하면 된다.

우도 함수는 모수 p 에 대해 비감소(non-decreasing) 함수이므로 $\max_p L \Leftrightarrow \max_p \ln(L)$

$\ln L(x_1, x_2,..., x_n; p) = \sum x_i \ln p + (n - \sum x_i)\ln(1-p)$ ➔ $\max_p \ln L \Rightarrow \dfrac{\partial(\ln L)}{\partial p} = 0$

$\sum x_i (1/\hat{p}) + (n - \sum x_i)(\dfrac{-1}{1-\hat{p}}) = 0 \Rightarrow \hat{p} = \dfrac{\sum x}{n}$: MLE

EXAMPLE 8.19

$(X_1, X_2,...X_n)$ 을 $Normal(\mu, \sigma^2)$ 으로부터 확률표본이라 하자. 모수 (μ, σ^2) 에 대한 MLE?

우도 함수: $L(x_1, x_2,..., x_n; \mu, \sigma^2) = \prod f(x_i; p) = (\dfrac{1}{2\pi\sigma^2})^{n/2} \exp[\dfrac{-1}{2\sigma^2}\sum(x_i - \mu)^2]$

$$\ln L(x_1, x_2,..., x_n; \mu, \sigma^2) = -\frac{n}{2}\ln\sigma^2 - \frac{n}{2}\ln 2\pi - \frac{1}{2\sigma^2}\sum(x_i - \mu)^2$$

$$\frac{\partial(\ln L)}{\partial\mu} = \frac{1}{\hat{\sigma}^2}\sum(x_i - \hat{\mu}) = 0\ , \quad \frac{\partial(\ln L)}{\partial\sigma^2} = -\frac{n}{2}(\frac{1}{\hat{\sigma}^2}) + \frac{1}{2(\hat{\sigma}^2)^2}\sum(x_i - \hat{\mu})^2 = 0$$

$\hat{\mu} = \overline{X}, \hat{\sigma}^2 = \dfrac{1}{n}\sum(x_i - \overline{x})^2$: MLE

EXAMPLE 8.20

$(X_1, X_2, ...X_n)$ 을 $Uniform(0,\theta)$ 으로부터 확률표본이라 하자. 모수 θ 에 대한 MLE?

우도 함수: $L(x_1, x_2,..., x_n; \mu, \sigma^2) = \prod f(x_i; p) = \prod \frac{1}{\theta} 1_{(0,\theta)}(x_i) = (\frac{1}{\theta})^n \prod 1_{(0,\theta)}(x_i)$

미분하여 최대가 되는 θ 을 구할 수 없다. 우도 함수를 보면 θ 값이 작을수록 커진다. 그러나 제약 조건(지시 함수)에 의하면 θ 가 모든 관측치보다 커야 한다. 그러므로 순서 통계량 $X_{(n)}$ 이 MLE이다.

MLE 얻는 과정을 보자. $L(x_1, x_2,..., x_n; \theta)$ 을 최대화 한다. 그런데 Factorization criterion에 의하면 $L(x_1, x_2,..., x_n; \theta) = g(u;\theta) h(x_1, x_2,..., x_n)$ 으로 쓸 수 있다. (U 는 충분 통계량)

$$\ln L(x_1, x_2,..., x_n; \theta) = \ln[g(u;\theta)] + \ln[h(x_1, x_2,..., x_n)]$$

그러므로 $\ln L$ 을 최대화 하는 모수를 찾는 것은 $\ln[g(u;\theta)]$ 을 최대화 하는 모수를 찾는 것과 동일하다. 그러므로 MLE는 충분 통계량 U 의 함수이다. 이제 MLE을 적절히 변환하여 불편성을 갖게 하면 R-B 정리에 의해 그 추정량이 **MVUE**이다.

EXAMPLE 8.18 ➔ $E(\hat{p}) = E(\frac{\sum x_i}{n})$ 이므로 $\hat{p}$ 는 MVUE이다.

EXAMPLE 8.19 ➔ $E(\hat{\mu}) = E(\overline{X}) = \mu$ 이므로 $\overline{X}$ 는 MVUE이다.

$E(\hat{\sigma}^2) = E(\frac{1}{n}\sum(x_i - \overline{X})^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2$ 이므로 $\frac{n}{n-1}\hat{\sigma}^2$ 는 MVUE이다.

EXAMPLE 8.20 ➔ $E(\hat{\theta}) = E(X_{(n)}) = \frac{n}{n+1}\theta$ 이므로 $\frac{n+1}{n} X_{(n)}$ 이 MVUE이다.

Invariance property of Maximum Likelihood Estimator

추정량 $\hat{\theta}$ 는 모수 θ 의 MLE 추정량이고 $t(\theta)$ 는 θ 의 일대일 함수라고 하자. $t(\theta)$ 의 MLE 추정량은 $t(\hat{\theta})$ 이다. 즉 $\widehat{t(\theta)} = t(\hat{\theta})$

EXAMPLE 8.21

$(X_1, X_2, ...X_n)$ 을 $Bernoulli(p)$ 으로부터 확률표본이라 하자. $V(X)$ 에 대한 MLE을 구하시오.

$V(X) = np(1-p) = t(p)$ Invariance property of MLE에 의해 $\hat{V}(X) = n\hat{p}(1-\hat{p}) = n(\frac{Y}{n})(1-\frac{Y}{n})$

이 추정량은 불편 추정량은 아니다. 불편성을 갖도록 조정하면 $\frac{n^2}{n-1}(\frac{Y}{n})(1-\frac{Y}{n})$: MVUE

HOMEWORK #17-1

$(X_1, X_2, ...X_n)$ 을 $Poisson(\lambda)$ 으로부터 확률표본이라 하자.

(1)모수 λ 에 대한 MLE $\hat{\lambda}$ 을 구하시오. $\hat{\lambda}$ 는 불평 추정치인가? $\hat{\lambda}$ 는 일치 추정량인가?

(2) $\sum x_i$ 는 충분 통계량임을 보이시오. 모수 λ 에 대한 MVUE를 구하시오.

(3) $P(X=0)$ 의 MLE를 구하시오.

HOMEWORK #17-2

$(X_1, X_2, ...X_n) \sim (iid)Exp(\theta = mean)$. θ^2 의 MLE를 구하고 MVUE를 구하시오.

HOMEWORK #17-3

$(X_1, X_2, ...X_n) \sim (iid) f(x;\theta) = \frac{1}{2\theta+1}, 0 \le x \le 2\theta+1$. θ 의 MLE를 구하시오.

HOMEWORK #17-4

$(X_1 = 120, X_2 = 130, X_3 = 128) \sim (iid)Gamma(\alpha = 2, \theta)$.

①모수 θ 의 MLE **추정량**을 구하시오. MLE 추정량은 MVUE인가?

② 모수 θ 의 MLE **추정치**를 구하시오.

■추정치는 추정량(식)을 이용하여 표본 데이터로부터 구한 값이다.